حل معادله انتشار امواج صوتی- گرانشی در جوّ با شیوه تفاضلات متناهی مرتبه دو

علی سطوتی زیرک[1]، سیدحجت‌اله مؤمنی ماسوله[*1]، حمیدرضا مساح[2]

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شاهد

۲. انجمن مهندسی صوتیّات ایران

چکیده

بررسی معادله انتشار امواج در جوّ یکی از مسائل مهم و پرکاربرد در علوم مختلف می‌باشد که محققین بسیاری را به‌خود جلب کرده است. یک نوع از امواج قابل انتشار در جوّ، موج صوتی- گرانشی می‌باشد. این نوع از امواج خاصیت مانایی زیادی دارند و می‌توانند تا ارتفاع بالایی از جوّ منتشر شوند. معادله انتشار موج صوتی- گرانشی در جوّ یک معادله هیدرودینامیک هذلولوی غیرخطی شامل معادلات پایستاری جرم، پایستاری حرکت و پایستاری انرژی می‌باشد. برای به‌دست آوردن جواب معادله انتشار امواج صوتی- گرانشی، معادلات هیدرودینامیک مرتبط به صورت یک معادله بقاء نوشته شده است. در ادامه با استفاده از روش لکس- وندروف دو مرحله‌ای که یک روش تفاضل متناهی با دقتی از مرتبه‌ی دوم در مکان و زمان می‌باشد، انتشار امواج صوتی- گرانشی در جوّ شبیه‌سازی شده است.

کلیدواژه‌ها: امواج صوتی- گرانشی، جوّ، لکس- وندروف دو مرحله‌ای، تفاضل (تفارق) متناهی، معادله هذلولوی.

۱. مقدمه

علاقه‌مندی به انتشار تپ[1] در جوّ از زمانی ایجاد شد، که یک اختلال فشار سراسری هنگام فوران کوه آتشفشان کراکتوآ در سال ۱۸۸۳ مشاهده شد. هم‌چنین در سال‌های ۱۹۵۶ با انفجار بمب هسته‌ای و آشوب ایجادشده از انفجار در جوّ، مورد توجه قرار گرفت. چگالی گازهای جوّ زمین با افزایش ارتفاع، تقریباً به‌طور نمایی کاهش می‌یابد. بنابراین گازهای جوّی توسط میدان گرانشی زمین به‌صورت جریانی طبقه طبقه درمی‌آیند. در این جریان‌ها امواج گرانشی درونی می‌توانند منتشر شوند. بنابراین گازهای جوّ، کشسان و تراکم‌پذیرند و امواج صوتی توانایی انتشار هم‌راستا با امواج گرانشی را دارند. پس امواج صوتی- گرانشی توأمان در جوّ قابلیت انتشار دارند. این نوع از امواج بسیاری از پدیده‌های فیزیکی در جوّ را توصیف می‌کنند. جوّ کره‌ی زمین شامل لایه‌های مختلفی می‌باشد که دارای خصوصیات متفاوتی مانند ترکیب، دما و فشار هستند [۱]. این لایه‌ها به ترتیب ارتفاع از سطح زمین به‌صورت زیر طبقه‌بندی می‌شوند:

الف) گردسپهر[2]: پایین‌ترین لایه از جوّ زمین است، که تقریبا سه چهارم از جرم جوّ را دربرمی‌گیرد. این لایه ۹۹ درصد از بخار آب جوّ زمین را شامل می‌شود. بسیاری از ابرها و سامانه‌های آب و هوایی در این لایه قرار دارند.

ب) لایه‌سپهر[3]: این لایه از ارتفاع ۲۰ تا ۵۰ کیلومتر از سطح زمین قرار دارد. هوا در این لایه تقریباً هزار برابر رقیق‌تر از هوا در سطح دریا است. با افزایش ارتفاع، دما نیز افزایش می‌یابد که بیشینه دما در این ناحیه به ۳ درجه سلسیوس می‌رسد. هم‌چنین لایه اُزن[4] در این لایه قرار دارد.

ج) میان‌سپهر[5]: ارتفاع این لایه در جوّ ۵۰ تا ۸۰ کیلومتر از سطح زمین می‌باشد. در این لایه شهاب‌سنگ‌های واردشده به جوّ زمین می‌سوزند. دمای لایه میان‌سپهر با افزایش ارتفاع، کاهش می‌یابد و به‌طور میانگین برابر با ۸۵ درجه سلسیوس است.

د) گرماسپهر[6]: گرماسپهر از ارتفاع ۸۵ کیلومتری سطح زمین تا ارتفاع ۶۹۰ کیلومتری آن را تشکیل می‌دهد. این

* نویسنده پاسخگو: momeni@shahed.ac.ir

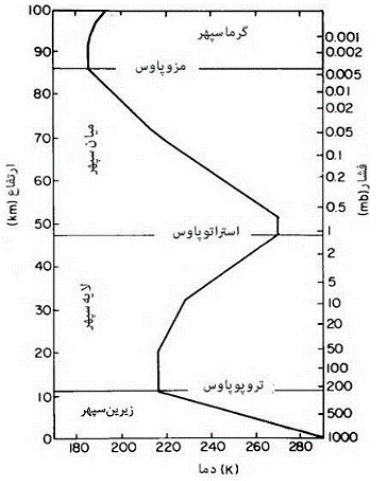
[1] Pulse

[2] Troposphere
[3] Stratosphere
[4] Ozon
[5] Mesosphere
[6] Thermosphere

لایه شامل یون‌سپهر[1] می‌باشد. شاتل‌های فضایی و ایستگاه فضایی بین‌المللی در این لایه قرار دارند.

هـ) برون‌سپهر[2]: بالاترین لایه جوّ زمین که از ارتفاع ۶۹۰ تا ۱۰,۰۰۰ کیلومتری سطح زمین گسترده شده است و مغناطیس‌سپهر[3] نیز در این محدوده قرار دارد. این لایه که دارای غلظت خیلی ضعیف است و با خلاء تفاوت چندانی ندارد، شامل هیدروژن، هلیم و مولکول‌های سنگین‌تر مانند نیتروژن، اکسیژن و کربن‌دی‌اکسید نیز می‌باشد. بسیاری از ماهواره‌ها در این لایه قرار دارند. به‌دلیل رقیق‌بودن بسیار هوا در برون‌سپهر، گرمای زیادی به اشیاء منتقل نمی‌شود، حتی اگر هوا بسیار گرم باشد.

در شکل ۱ خصوصیات جوّ تا ارتفاع ۱۰۰ کیلومتری نمایش داده شده است.



شکل ۱ تغیرات دما و فشار برحسب ارتفاع در جوّ [۲].

۲. معادلات هیدرودینامیک غیرخطی

معادلات هیدرودینامیک برای یک سیال آرمانی، با قانون گازهای کامل رفتار گازهای جوّی را توصیف می‌کنند. حال اگر در این معادلات از عبارت شتاب عمودی صرف‌نظر شود، الگوی شبه‌ایستا[4] و در صورت کامل بودن معادلات هیدرودینامیک، الگوی غیرشبه‌ایستا[5] نامیده می‌شود. شوتسکی در سال ۲۰۰۱ با مقایسه این دو الگو به این نتیجه رسیده که یک جواب هموار کلاسیک از مسأله شبه‌ایستا غیرخطی برای تمام زمان‌ها وجود ندارد [۳]. بنابراین الگوی غیرشبه‌ایستا در معادلات هیدرودینامیک به واقعیت فیزیکی انتشار موج در سیال جوّ، نزدیک‌تر می‌باشد [۱].

الگوی عددی دو-بعدی امواج صوتی-گرانشی غیرخطی در جوّ با مجموعه‌ای از معادلات به‌صورت زیر قابل بیان می‌باشد [۵-۶].

معادله پایستاری جرم (پیوستگی) به‌صورت زیر می‌باشد؛

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0 \qquad (۱)$$

که در آن ρ چگالی، t معرف زمان، u بردار سرعت افقی موج و v بردار سرعت عمودی موج می‌باشند.

معادلات پایستاری اندازه‌حرکت نیز به‌صورت زیر هستند؛

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t}+\frac{\partial \rho u^2}{\partial x}+\frac{\partial \rho u v}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) \qquad (۲)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t}+\frac{\partial \rho u v}{\partial x}+\frac{\partial \rho v^2}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad (۳)$$

که در آن P نشان‌دهنده فشار سیال و μ لزجت مولکولی[6] می‌باشند.

لزجت مولکولی از رابطه زیر محاسبه می‌شود [۷]:

$$\mu(z)=C_1\frac{T^{\frac{3}{2}}}{T+C_2} \qquad (۴)$$

$$C_1=1.458\times10^{-6}\left(\frac{kg}{m.s.\sqrt{K}}\right) \qquad (۵)$$

$$C_2=110.4(K) \qquad (۶)$$

که در آن T نمایانگر دما بر حسب کلوین و C_1 و C_2 ثابت‌های محاسبه شده می‌باشند.

معادله پایستاری انرژی نیز به‌صورت زیر می‌باشد؛

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial(Pu)}{\partial x}+\frac{\partial(Pv)}{\partial y}=-(\gamma-1)\left[P\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-Q\right] \qquad (۷)$$

که در آن γ و Q به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\gamma=\frac{C_P}{C_V} \qquad (۸)$$

[1] Ionosphere
[2] Exosphere
[3] Magnetosphere
[4] Quasi-static
[5] Non-quasi-static
[6] Molecular viscosity

که در آن C_P ضریب حرارت ویژه در فشار ثابت و C_v ضریب حرارت ویژه در حجم ثابت می‌باشند.

$$Q(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial}{\partial}\left(T - T_{\cdot}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial}{\partial x}T\right) \qquad (۹)$$

در معادله (۹)، k ضریب هدایت گرمایی است و به‌صورت زیر محاسبه می‌شود [۲]:

$$k(z) = C_{۳}\frac{T^{\frac{۳}{۲}}}{T + C_{۴}} \qquad (۱۰)$$

$$C_{۳} = ۲.۴۹۵\times ۱۰^{-۳}\left(\frac{kg.m}{s^{۳}.K^{\frac{۳}{۲}}}\right) \qquad (۱۱)$$

$$C_{۴} = ۱۹۴.۰(K) \qquad (۱۲)$$

کـه در آن T نمایـانگر دمـا برحسـب کلـوین و $C_{۳}$ و $C_{۴}$ ثابت‌های محاسبه شده می‌باشند.

در این الگو شرایط مرزی بـرای ارتفـاع ۵۰۰ کیلـومتری از سطح زمین به‌صورت زیر بیان می‌شوند؛

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) = ۰, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = ۰, \quad v = ۰ \qquad (۱۳)$$

شرایط مرزی در سطح زمین به‌صورت زیر بیان می‌شوند؛

$$T = ۰, \quad u = ۰ \qquad (۱۴)$$

که در آن $T = ۰$ نمایـانگر اخـتلاف دمـای صـفر در سـطح زمین قبل از انتشار موج می‌باشد.

هم‌چنین منبع موج صوتی در سطح زمین برای ایـن الگـو به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$(v)_{y=۰} = -a\sin\left(\omega\left(t - {}^{x}\!/_{c}\right)\right) \qquad (۱۵)$$

که در آن a(m/s) دامنه منبع موج، ω بسامد منبـع مـوج و c سرعت فاز افقی منبع موج می‌باشند. هـم‌چنـین تمـامی متغیرهای هیـدرودینامیکی در راسـتای افقـی متنـاوب بـا دوره تناوب طول‌موج فرض شده‌اند.

۳. روش عددی لکس- وندروف دو مرحله‌ای

ریشمایر در سال ۱۹۶۲ میلادی روش لکـس- ونـدروف را بهبود بخشید و نیاز ایـن روش بـه مـاتریس ژاکـوبین را از بـین بـرد. روش عـددی لکـس-ونـدروف دو مرحلـه‌ای (ریشمایر) یک روش حل عددی مسائل هذلولوی به‌صورت معادله بقاء می‌باشد. این روش حل عـددی از نـوع تفاضـل (تفارق) متناهی است که جـواب معادلـه بـه‌صـورت کـاملاً صریح با دقتی از مرتبه‌ی دوم به‌دست می‌آید. برتری روش عددی لکس-وندروف دو مرحله‌ای سادگی روش و مراحل زمانی بزرگ است [۸].

انتشار موج صـوتی-گرانشـی در جـوّ یـک مسـأله از نـوع هذلولوی می‌باشد که آن را می‌توان با تبدیل به یک معادله بقاء، با استفاده از روش لکس-وندروف دو مرحلـه‌ای، حـل کرد.

معادلات (۱)، (۲)، (۳) و (۷) را به‌صورت یک معادلـه بقـاء (رابطه ۱۶) می‌توان نوشت [۹]؛

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = E \qquad (۱۶)$$

که در آن بردارها به‌صورت زیر هستند:

$$U = \begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ P\end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^{۲}+P\\ \rho vu\\ Pu\end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^{۲}\\ Pv\end{pmatrix} \qquad (۱۷)$$

بردار E باقی‌مانده عبـارت‌هـای معـادلات (۱)، (۲)، (۳) و (۷) را شامل می‌شود:

$$E = \begin{pmatrix}e_{۱}\\ e_{۲}\\ e_{۳}\\ e_{۴}\end{pmatrix}$$

$$e_{۱} = ۰$$

$$e_{۲} = \frac{\partial}{\partial z}\mu(z)\frac{\partial u}{\partial z} + \mu(z)\frac{\partial^{۲}u}{\partial z^{۲}} + \frac{\partial}{\partial x}\mu(z)\frac{\partial u}{\partial x} + \mu(z)\frac{\partial^{۲}u}{\partial z^{۲}}$$

$$e_{۳} = \frac{\partial}{\partial z}\mu(z)\frac{\partial v}{\partial z} + \mu(z)\frac{\partial^{۲}v}{\partial z^{۲}} + \frac{\partial}{\partial x}\mu(z)\frac{\partial v}{\partial x} + \mu(z)\frac{\partial^{۲}v}{\partial z^{۲}}$$

$$e_{۴} = (۱-\gamma)\{P\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) - [\frac{\partial}{\partial z}k(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(T - T_{\cdot}(z)\right)$$

$$+k(z)\frac{\partial^{۲}}{\partial z^{۲}}\left(\left(T - T_{\cdot}(z)\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x}k(z)\frac{\partial}{\partial x}T + k(z)\frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}}T]\}$$

در عبارت $e_{۲}$ و $e_{۳}$ برای محاسبه μ از عبـارت (۴) اسـتفاده شده است. لذا از عبارت (۴) به صورت زیـر مشـتق گرفتـه می‌شود:

$$\frac{\partial \mu(z)}{\partial z} = \frac{\left(\frac{3}{2}C_1 T(z)^{\frac{1}{2}}\right)\left(T(z)+C_2\right) - \left(C_1 T(z)^{\frac{3}{2}}\right)}{\left(T(z)+C_2\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}C_1 T(z)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}C_1 T(z)^{\frac{1}{2}}}{\left(T(z)+C_2\right)^2}$$

در عبارت e_4 برای محاسبه $k(z)$ از رابطه‌ی شماره (۱۰) نسبت به ارتفاع و محور z به‌صورت زیر مشتق گرفته می‌شود:

$$\frac{\partial k(z)}{\partial z} = \frac{\left(\frac{3}{2}C_3 T(z)^{\frac{1}{2}}\right)\left(T(z)+C_4\right) - \left(C_3 T(z)^{\frac{3}{2}}\right)}{\left(T(z)+C_4\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}C_3 T(z)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}C_3 T(z)^{\frac{1}{2}}}{\left(T(z)+C_4\right)^2}$$

هم‌چنین برای مشتقات مرتبه دوم از تقریب مرکزی استفاده می‌شود، که در مرزها از متناوب بودن مسأله می‌توان استفاده کرد.

در هر مرحله از روش عناصر بردار E که ترکیبی از مشتق‌های اول و دوم از متغیرها می‌باشند، محاسبه می‌شوند. برای عدم کاهش دقت روش به کاربرده شده، مشتق‌های بردار E با دقت مرتبه‌ی دوم و یا بیش‌تر تقریب زده می‌شوند. با گسسته‌سازی معادله (۱۶)، مرحله اول از روش به‌صورت زیر می‌باشد [۱۰]:

$$\begin{aligned} U^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4}\left(U^n_{i+1,j+1} + U^n_{i+1,j} + U^n_{i,j+1} + U^n_{i,j}\right) \\ &- \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(F^n_{i+1,j+1} - F^n_{i,j+1} + F^n_{i+1,j} - F^n_{i,j}\right) \\ &- \frac{\Delta t}{2\Delta y}\left(G^n_{i+1,j+1} - G^n_{i+1,j} + G^n_{i,j+1} - G^n_{i,j}\right) \\ &+ \frac{\Delta t}{4}\left(E^n_{i+1,j+1} + E^n_{i+1,j} + E^n_{i,j+1} + E^n_{i,j}\right) \end{aligned} \tag{۱۸}$$

که در آن متغیرها به این صورت جداسازی می‌شوند:

$$F^n_{i,j} = F\left(U^n_{i,j}\right),\ G^n_{i,j} = G\left(U^n_{i,j}\right)$$
$$E^n_{i,j} = E\left(U^n_{i,j}\right) \tag{۱۹}$$

مرحله دوم از این روش به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

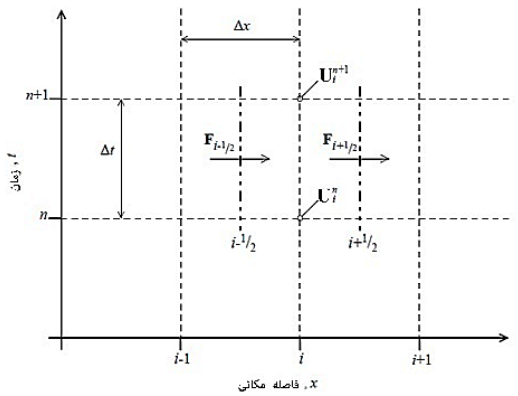
$$\begin{aligned} U^{n+1}_{i,j} &= U^n_{i,j} - \frac{\Delta t}{4\Delta x}\left(F^n_{i+1,j} - F^n_{i-1,j} + 2\tilde{F}^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j} - 2\tilde{F}^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j}\right) \\ &- \frac{\Delta t}{4\Delta y}\left(G^n_{i,j+1} - G^n_{i,j-1} + 2\tilde{G}^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}} - 2\tilde{G}^{n+\frac{1}{2}}_{i,j-\frac{1}{2}}\right) \\ &+ \frac{\Delta t}{2}\left(E^n_{i,j} - \tilde{E}^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}\right), \end{aligned} \tag{۲۰}$$

$$\tilde{F}^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}\left(F^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + F^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\right),$$

$$\tilde{G}^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(G^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + G^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}^{n+\frac{1}{2}}_{i,j} &= \frac{1}{4}\left(\tilde{E}^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \tilde{E}^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right) \\ &+ \frac{1}{4}\left(\tilde{E}^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + \tilde{E}^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\right) \end{aligned} \tag{۲۱}$$

که i زیروند نشان‌دهنده مکان افقی، j زیروند نشان‌دهنده مکان عمودی و n زیروند نشان‌دهنده زمان می‌باشند. هم‌چنین Δx، Δy و Δt به‌ترتیب فاصله مکانی و فاصله زمانی در شبکه محاسباتی را نشان می‌دهند. شکل ۲ شبکه محاسباتی مورد استفاده در روش لکس- وندروف دو مرحله‌ای را نشان می‌دهد.



شکل ۲ شبکه محاسباتی برای روش لکس-وندروف دو مرحله‌ای.

۴. پایداری روش لکس- وندروف دو مرحله‌ای

برتری روش حل لکس- وندروف دومرحله‌ای (ریشمایر) برای سامانه‌های قانون بقاء که مسأله‌های هذلولوی هستند، سادگی و مراحل زمانی بزرگ است. فرض کنید که مساله هذلولوی دو- بعدی به شکل قانون بقاء به‌صورت زیر با شرط اولیه $U(0,x,y)$ موجود باشد.

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F(U)}{\partial x}+\frac{\partial G(U)}{\partial y}=0 \qquad (۲۲)$$

سادگی مذکور این است که در روش لکس- وندروف دو مرحله‌ای از ماتریس ژاکوبین که در روش لکس- وندروف ساده به‌کار می‌رفت، استفاده نمی‌شود.

$$U^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}=\tilde{U}^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}+\frac{\lambda}{2}\left(\tilde{F}^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-\tilde{F}^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}+\tilde{G}^{n}_{i\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-\tilde{G}^{n}_{i+\frac{1}{2},j}\right) \qquad (۲۳)$$

$$U^{n+1}_{i,j}=U^{n}_{i,j}-\lambda\left(\tilde{F}^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}-\tilde{F}^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j}+\tilde{G}^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}}-\tilde{G}^{n+\frac{1}{2}}_{i,j-\frac{1}{2}}\right) \qquad (۲۴)$$

که در آن $\lambda=\frac{\Delta t}{\Delta y}=\frac{\Delta t}{\Delta x}$ است.

$$\hat{U}^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\left(U^{n}_{i+1,j+1}+U^{n}_{i+1,j}+U^{n}_{i,j+1}+U^{n}_{i,j}\right)$$

$$\tilde{F}^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}=F\left[\frac{\left(U^{n}_{i+1,j}+1+U^{n}_{i+1,j}\right)}{2}\right] \qquad (۲۵)$$

$$\tilde{F}^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}=F\left[\frac{U^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}+U^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{2}\right]$$

ماتریس گسترده نوع خطی‌شده روابط (۲۳) و (۲۴) برای محاسبه مقادیر ویژه به‌صورت زیر است [۷]:

$$P=I+i\lambda\left[A\sin\zeta\frac{1+\cos\eta}{2}+B\sin\eta\frac{1+\cos\zeta}{2}\right]-\frac{\lambda}{2}\left[A\sqrt{(1-\cos\zeta)(1+\cos\eta)}+B\sqrt{(1+\cos\zeta)(1-\cos\eta)}\right]^{2}$$

که در آن ζ و η متغیر دوگان بعد از تبدیلات فوریه و $i=\sqrt{-1}$ عدد موهومی می‌باشند. حال می‌توان نشان داد:

$$M=A\sqrt{(1-\cos\zeta)(1+\cos\eta)}+B\sqrt{(1+\cos\zeta)(1-\cos\eta)}$$

که در آن $A=\frac{\partial F}{\partial U}$ و $B=\frac{\partial G}{\partial U}$ ماتریس‌های ژاکوبین هستند. بنابراین ماتریس P را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$P=I+\frac{i}{2}\lambda\sqrt{(1+\cos\zeta)(1+\cos\eta)}M-\frac{1}{2}\lambda^{2}M^{2}$$

و با استفاده از قضیه طرح اسپکترال به‌دست می‌آید:

$$p=1+\frac{i}{2}\lambda\sqrt{(1+\cos\zeta)(1+\cos\eta)}m-\frac{1}{2}\lambda^{2}m^{2}$$

که در آن p و m به ترتیب مقادیر ویژه ماتریس‌های P و M هستند. از سوی دیگر با توجه به شرط ون- نیومن نامساوی زیر به‌دست می‌آید:

$$|p|^{2}=\left(1-\frac{1}{2}\lambda^{2}m^{2}\right)^{2}+\frac{1}{4}\lambda^{2}m^{2}(1+\cos\zeta)(1+\cos\eta)\le 1$$

برای تمام مقادیر ζ و η که در شرط $|\zeta|,|\eta|\le\pi$ صدق می‌کنند. عبارت‌ها را به‌صورت زیر می‌توان در نظر گرفت:

$$\beta=1-\sin^{2}\frac{\eta}{2},\quad \alpha=1-\sin^{2}\frac{\zeta}{2}$$

آنگاه نامساوی زیر به‌دست می‌آید:

$$\lambda^{2}m^{2}\le 4(1-\alpha\beta) \qquad (۲۶)$$

برای تمام مقادیری که در شرط $0\le\alpha,\beta\le 1$ صادق باشند، برقرار است. بدون وارد شدن خللی به مساله فرض می‌شود که $AB=BA$ باشد، آنگاه به‌دست می‌آید که:

$$m_i=2\sqrt{\beta(1-\alpha)}.a_i+2\sqrt{\alpha(1-\beta)}.b_i$$

که m_i، a_i و b_i به‌ترتیب مقادیر ویژه i-اُم از ماتریس‌های M، A، B می‌باشند. حال با توجه به عبارت (۲۶) می‌توان نوشت:

$$\lambda^{2}\le\frac{1-\alpha\beta}{a_i^{2}\beta(1-\alpha)+b_i^{2}\alpha(1-\beta)+2a_ib_i\sqrt{\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)}}$$

که برای تمام $0\le\alpha,\beta\le 1$ برقرار است.

به راحتی مقدار کمینه سمت راست نامساوی بالا با توجه به محدوده α، β به‌دست می‌آید. که این مقدار برابر است

با $\frac{1}{a_i^2+b_i^2}$. بنابراین شرط پایداری به‌صورت زیر است:

$$\lambda \le \frac{1}{\max_i \sqrt{a_i^2+b_i^2}} \qquad (۲۷)$$

در حالی‌که شرط ریشمایر در این مورد به‌صورت زیر است:

$$\lambda \le \frac{1}{\max_i \sqrt{2a_i^2+2b_i^2}}$$

در مواردی که A، B متقارن‌اند، شرط پایداری به شکل زیر اتخاذ می‌شود:

$$\lambda \le \left[\rho\left(A^2+B^2\right)\right]^{\frac{-1}{2}}$$

که $\rho\left(A^2+B^2\right)$ شعاع طیفی ماتریس A^2+B^2 است [۱۱]. در مواردی از معادلات هیدرودینامیک که $AB \neq BA$ است، می‌توان با استفاده از متقارن‌سازی هم‌زمان ماتریس‌ها آن‌ها را متقارن ساخت [۱۲].

همان‌گونه که می‌دانیم با استفاده از قضیه تیلور خطای قطع موضعی روش لکس-وندروف به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$T_i^n = \frac{1}{6}\left(\Delta t^2 \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} - \Delta x^2 \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right) + O\left(\Delta x^3\right) + O\left(\Delta t^3\right)$$

در این روش خطا از مرتبه دوم است. یعنی اگر $\Delta t^2 \to 0$ و $\Delta x^2 \to 0$ باشد، آنگاه خطای قطع موضعی روش به سمت صفر میل کند، یعنی $T_i^n \to 0$ و بنابراین روش سازگار است. بنابر قضیه هم‌ارزی لکس نتیجه می‌شود که روش تحت شرط پایداری ۲۷ طرح همگرا خواهد بود.

۵. نتایج عددی

با استفاده از روش لکس-وندروف دو مرحله‌ای (ریشمایر)، معادله (۱۶) که فرم بقایی معادلات هیدرودینامیک غیرخطی است را می‌توان حل نمود. لازم به ذکر است که معادلات به‌کارگرفته شده شامل لزجت مولکولی و ضریب شار حرارتی هستند. مقدار این ویژگی‌ها با افزایش ارتفاع در جوّ، افزایش می‌یابند؛ بنابراین فقط تابعی از ارتفاع هستند [۱۳-۱۴]. هم‌چنین در این معادلات بعضی اثرات مانند پراکندگی موج[1] ناشی از تشعشع مبادله حرارت کشش یونی و نیروی کُری‌الیس[2] صرف نظر شده است. اگرچه طبق منبع [۱۵] لزجت مولکولی هم می‌تواند مانند آشفتگی ناشی از کشش یونی در پایین گرماسپهر هنگام فعالیت زیاد خورشید عمل کند.

برای شروع یک شبکه مستطیلی به ابعاد افقی ۱۲۵۰ کیلومتر و عمودی ۵۰۰ کیلومتر از جوّ در نظر گرفته می‌شود، این شبکه برای روش تفارق (تفاضل) متناهی لکس-وندروف دو مرحله‌ای به ترتیب فواصل افقی و عمودی ۵۰ و ۵ کیلومتر می‌باشند. برای مقدار داده T. از الگوی استاندارد جوّ اِم‌اِس‌آی‌اِس- ۹۰[3] استفاده شده است. این داده‌های اولیه از تارنمای سازمان فضایی آمریکا (ناسا) برای طول و عرض جغرافیایی ۵۱ شرقی و ۳۵ شمالی که مربوط به طول و عرض جغرافیایی شهر تهران در اولین روز از ماه ژوئن سال ۲۰۱۶ میلادی می‌باشد، گرفته شده است [۱۶].

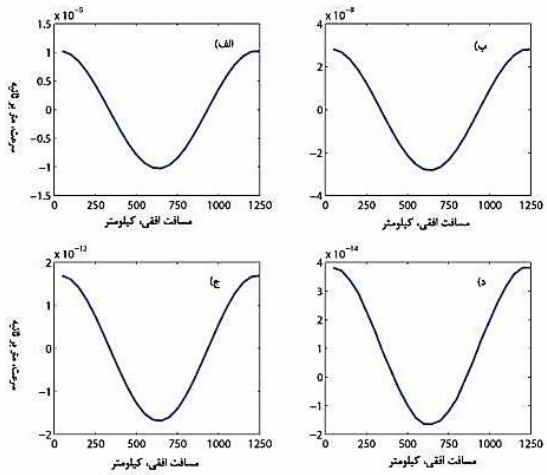
دامنه منبع موج در سطح زمین برابر با a=۰/۳ سانتی‌متر بر ثانیه، سرعت فاز افقی منبع موج برابر با c=۱۵۰ متر بر ثانیه و بسامد موج ω=۰/۰۰۰۷۵ در نظر گرفته شده است. این سرعت موج باعث می‌شود که موج صوتی- گرانشی تا ارتفاع بالای جوّ، حدود ۵۰۰ کیلومتری، منتشر شود. فاصله زمانی در هر مرحله از شبیه‌سازی با توجه به شبکه طولی و عرضی از ۶ تا ۰/۰۰۰۰۰۱ ثانیه در نظرگرفته شد. برای این منظور از روش شبکه متغیر[4] استفاده شده است. این فواصل زمانی به‌کار گرفته شده، پایداری روش عددی مورد استفاده را با توجه به شرط سی‌اِف‌اِل[5] تضمین می‌کنند. هم‌چنین ضریب γ=۱/۴ فرض شده است. با توجه به اینکه این عدد برای هوای معمولی صادق است و در لایه‌های مختلف جوّ زمین با وجود ترکیبات مختلف گازها این عدد تغییر می‌کند.

با فرضیاتی که مطرح شد، مسأله را می‌توان با روش لکس-وندروف دو مرحله‌ای از لحظه t=۰ شروع به حل کرد. با اجرای روش برای ۹۰ ثانیه داده‌هایی از شبیه‌سازی انتشار

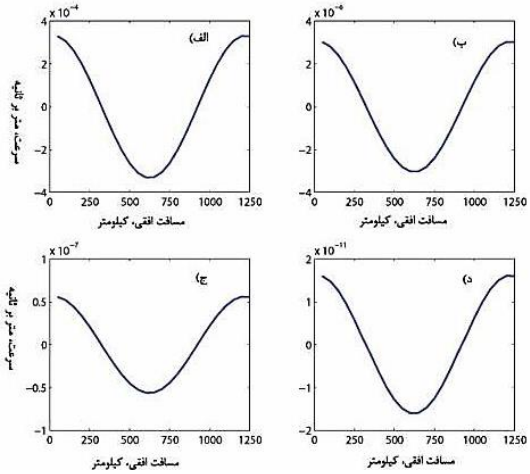
[1] Wave disspation
[2] Coriolis force
[3] MSIS-90
[4] Adapt mesh
[5] CFL

موج صوتی- گرانشی به‌دست می‌آید.

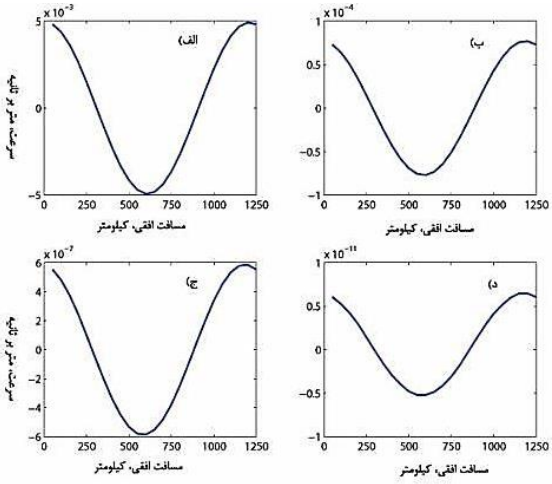
با توجه به شکل‌های ۳ تا ۷ که سرعت افقی موج را در ارتفاع‌های ثابتی نشان می‌دهند، ملاحظه می‌شود که امواج صوتی- گرانشی خیلی سریع در کم‌تر از ۱۰۰ ثانیه به بالای ارتفاع ۹۰ کیلومتری رسیده‌اند. هم‌چنین با گذشت زمان در ارتفاع‌های مختلف سرعت فاز افقی موج صوتی- گرانشی افزایش می‌یابد. انتشار موج صوتی- گرانشی در جوّ اختلالی در لایه‌های مختلف جوّ به‌وجود آورده که این افزایش سرعت موج موجب اختلال می‌شود. اختلالات ناشی‌شده باعث تغییر دما و سرعت انتشار موج در لایه‌های مختلف جوّ می‌شوند. بیش‌ترین اختلال ناشی از امواج صوتی- گرانشی در لایه یون‌سپهر اتفاق می‌افتد که در ارتفاع بالای ۹۰ کیلومتری سطح زمین قرار گرفته است.



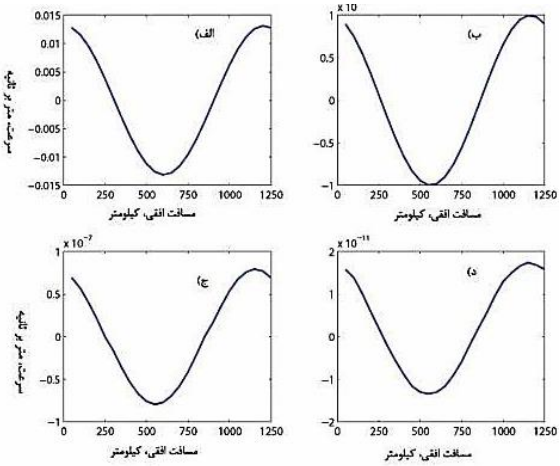
شکل ۳ سرعت افقی u بعد از ۱۵ ثانیه در ارتفاع (الف) ۱۵، (ب) ۲۵، (ج) ۳۵ و (د) ۴۰ کیلومتر از سطح زمین.



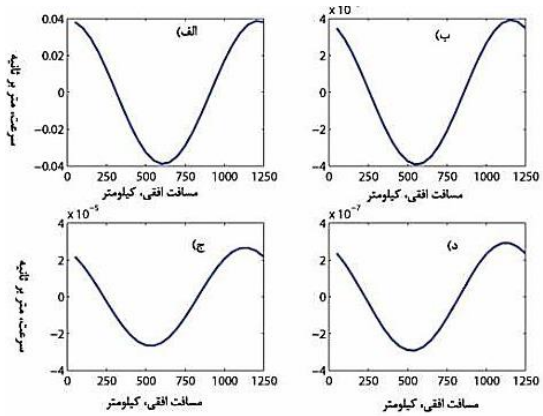
شکل ۴ سرعت افقی u بعد از ۳۰ ثانیه در ارتفاع (الف) ۱۵، (ب) ۳۰، (ج) ۴۰ و (د) ۴۵ کیلومتر از سطح زمین.



شکل ۵ سرعت افقی u بعد از ۶۰ ثانیه در ارتفاع (الف) ۱۵، (ب) ۴۰، (ج) ۶۰ و (د) ۸۰ کیلومتر از سطح زمین.



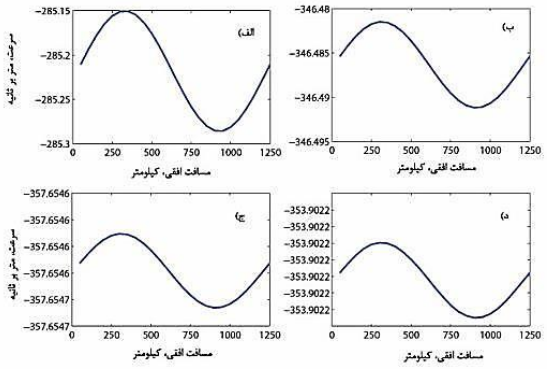
شکل ۶ سرعت افقی u بعد از ۷۵ ثانیه در ارتفاع (الف) ۱۵، (ب) ۳۰، (ج) ۸۰ و (د) ۹۵ کیلومتر از سطح زمین.



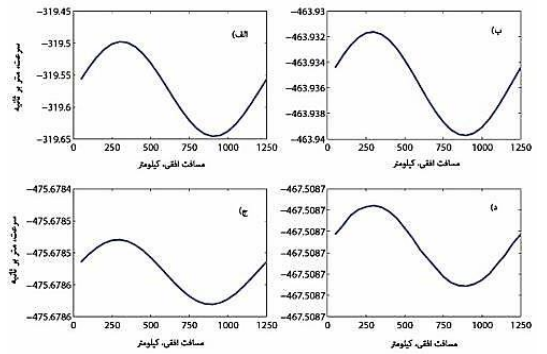
شکل ۷ سرعت افقی u بعد از ۹۰ ثانیه در ارتفاع (الف) ۱۵، (ب) ۳۰، (ج) ۷۰ و (د) ۹۰ کیلومتر از سطح زمین.

شکل‌های ۸ تا ۱۱ نمودار سرعت عمودی موج صوتی-

گرانشی در ارتفاع‌های ثابتی از جوّ را نشان می‌دهند. با توجه به این شکل‌ها ملاحظه می‌گردد که سرعت عمودی موج در لحظه‌های مختلف از انتشار متفاوت هست. این اختلاف سرعت ناشی از لایه‌های جوّی است که مولکول‌های متفاوت با ترکیب و ویژگی‌های متفاوتی در این لایه‌ها موجودند. همان‌طورکه در شکل‌های ۸ و ۹ ملاحظه می‌شود، سرعت در لایه‌های مختلف جوّ بعد از ۴۵ و ۶۰ ثانیه انتشار، تقریباً برابرند. اما با ملاحظه شکل‌های ۱۰ و ۱۱ می‌توان دریافت که سرعت عمودی انتشار موج صوتی- گرانشی در ارتفاع‌های بالاتر جوّ بیش‌تر شده است. این افزایش سرعت در ارتفاع‌های لایه میان‌سپهر تند بادهای موجود در این لایه از جوّ را نشان می‌دهد.کدهای محاسباتی در نرم‌افزار متلب ۲۰۱۳ نوشته شده است و با استفاده از رایانه با مشخصات اینتل(آر) کُر(تی‌اِم) آی۷- ۴۵۱۰یو[1] با پردازنده‌های ۲/۵ گیگاهرتزی

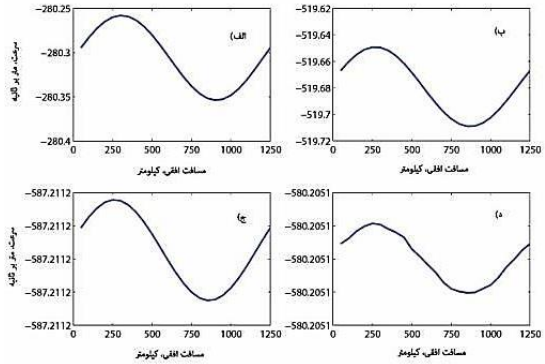


شکل ۸ سرعت عمودی v بعد از ۴۵ ثانیه در ارتفاع (الف) ۱۵، (ب) ۳۰، (ج) ۵۰ و (د) ۷۰ کیلومتر از سطح زمین.

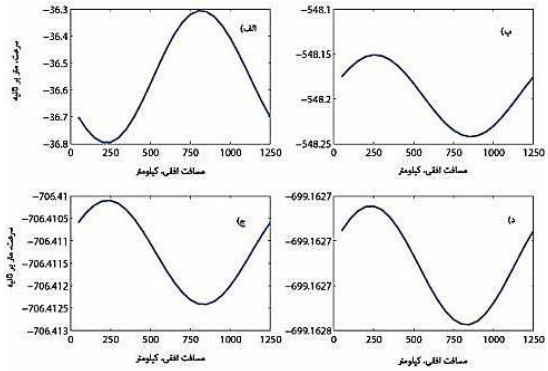


شکل ۹ سرعت عمودی v بعد از ۶۰ ثانیه در ارتفاع (الف) ۱۵، (ب) ۴۰، (ج) ۶۰ و (د) ۸۰ کیلومتر از سطح زمین.

مجهز به ۸ گیگابایت رم مدت زمان ۹۰ ثانیه از انتشار موج را شبیه‌سازی کرده است. برای به‌دست آوردن نتایج دقیق‌تر و بیش‌تر شبیه‌سازی را برای مدت زمان بیش‌تری باید انجام داد، مثلاً یک دوره موج که در این مسأله ۱۲۰۰ ثانیه در نظر گرفته شده است. این مدت زمان از شبیه‌سازی با توجه به حجم بالای محاسبات نیازمند رایانه قوی‌تری است.



شکل ۱۰ سرعت عمودی v بعد از ۷۵ ثانیه در ارتفاع (الف) ۱۵، (ب) ۳۰، (ج) ۸۰ و (د) ۹۵ کیلومتر از سطح زمین.



شکل ۱۱ سرعت عمودی v بعد از ۹۰ ثانیه در ارتفاع (الف) ۱۵، (ب) ۳۰، (ج) ۷۰ و (د) ۹۵ کیلومتر از سطح زمین.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله شبیه‌سازی انتشار موج صوتی- گرانشی در جوّ کره‌زمین با استفاده از روش عددی لکس- وندروف انجام شده است. انتشار این نوع از امواج، اغتشاشاتی در جوّ ایجاد می‌کند. انتشار موج صوتی- گرانشی در جوّ اختلالاتی در لایه‌های مختلف جوّ به‌وجود می‌آورد که افزایش سرعت موج در این لایه‌ها موجب این اختلال می‌شود. این اختلالات ناشی‌شده باعث تغییر دما و فشار در لایه‌های جوّ می‌شوند. بیش‌ترین اختلال مورد انتظار در

[1] Intel(R) core(TM) i7-4510U

لایه گرماسپهر که لایه یون‌سپهر در این لایه قرار دارد، اتفاق می‌افتد که تقریباً از ارتفاع ۸۵ کیلومتری جوّ شروع می‌شود. از این ارتفاع به بالا ترکیب گازها عوض شده و سرعت انتشار موج در این لایه‌ها تغییر می‌کند. افزایش سرعت در لایه میان‌سپهر، تندبادهای موجود در این لایه از جوّ را نشان می‌دهد.

۷. فهرست منابع

[1] F. Press, D. Harkrider, "Propagation of acoustic-gravity waves in the atmosphere," Journal of Geophysical Research, vol. 67, no. 10, 1962.

[2] E.E. Gossard, W.H. Hooke, "Wave in the Atmosphere, Atmospheric Infrasound and Grawity Waves their Generation and Propagation," Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York, 1975.

[3] S.P. Kshevetskii, "Analytical and numerical in vestigation of nonlinear internal gravity waves," Journal of Nonlinear Processes in Geophysics, vol. 8, pp. 37-53, 2001.

[4] R.W. Fox, "Introduction to fluid mechanics," 6th edition, 2009 (in Persian).

[5] N.M. Gavrilov, S.P. Kshevetskii, "Modeling of propagation of breaking nonlinear acoustic-gravity waves from the lower to the upper atmosphere," Journal of Advance Space Research, vol. 51, pp. 1168-1174, 2013.

[6] N.M. Gavrilov, S.P. Kshevetskii, "Numerical modeling of the propagation of nonlinear acoustic-gravity waves in the middle and upper atmosphere," Journal of Atmospheric and Oceanic Physics, vol. 50, pp. 66-72, 2014.

[7] J. Hudson, "Numerical techniques for conservation laws with source term," MSc Thesis, University of Reading, UK, 1998.

[8] E.F. Toro, "Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics," Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999.

[9] P.D. Lax, "Hyperbolic system of conservation laws," Commun. Pure Application Mathematic, vol. 10, pp. 537-566, 1967.

[10] G. Zwas, "On two step lax-wendroff methods in sevral dimensions," Numerische Mathemetik, vol. 20, pp. 350-355, 1973.

[11] P.D. Lax, B. Wendroff, "Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy," Commun. Pure Application Mathematic, vol. 17, pp. 381-392, 1964.

[12] E. Turkel, "Symmetrization of the fluid dynamic matrices with applications," Mathematics of Computation, vol. 27, no. 124, pp. 729-736, 1973.

[13] F.J. Lubken, "Rocket-borne measurements of small scale structures and turbulence in the upper atmosphere," Advances in Space Research vol. 17, no. 11, pp. 25–35, 1996.

[14] C.A. Clayson, L. Kantha, "On turbulence and mixing in the free atmosphere inferred from high-resolution soundings," Journal of Atmospheric and Oceanic Technology, vol. 25, pp. 833–851, 2008.

[15] E. Yigit, A.D. Aylward, A.S. Medvedev, "Parameterization of the effects of vertically propagating gravity waves for thermosphere general circulation models: Sensitivity Study," Journal of Geophysical Research, vol. 113, D19106, 2008.

[16] N.E. Papitashvili, "The Space Physics Data Facility (SPDF) hosts the S3C Active Archive, which consists of web services f or survey and high resolution data, trajectories, and scientific models", https://omniweb.gsfc.nasa.gov, 10/6/2017.

Journal of Acoustical Engineering Society of Iran, Vol. 6, No. 1, 2018

Solution of propagation of acoustic-gravity waves in the atmosphere using finite difference method of order two

A. Setvati-Zirak[1], S.H. Momeni-Masuleh[*1], H.R. Massah[2]
1. Department of Mathematics, Shahed University
2. Acoustical Engineering Society of Iran

Abstract

Investigating waves propagation's equation in the atmosphere is one of the important and widely used issues in various sciences, which has attracted many researchers. A type of propagating waves is an acoustic-gravity wave. These type of waves have a lot of stationarity properties and can be propagate to a high altitude in the atmosphere. The equation of acoustic-gravity wave propagation is a hyperbolic nonlinear hydrodynamic equation consisting of continuity, motion, and energy equations. To obtain the solution of the acoustic-gravity waves propagation equation, the related hydrodynamic equations are written in the form of a conservation equation. In the next step, the propagation of the acoustic-gravity wave is simulated in the atmosphere using a two-stage Lax-Wendroff method, which is a finite difference method with a second order accuracy in place and time.

Keywords: Acoustic-gravity waves, Atmosphere, Tow-stage Lax-Wendroff, Finite difference, Hyperbolic equation.

pp. 12-20 (In Persian)

[*] Corresponding author E-mail: momeni@shahed.ac.ir