بهبود کیفیت تصاویر فراصدایی با بهره‌گیری از تخمین‌گرهای بیّسی

ناصر حسین‌زاده اصل آخته‌خانه[1]، محمدباقر خدابخشی[*2]، یاسمن وجگانی[3]

۱. دانشکده مهندسی پزشکی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تبریز

۲. گروه مهندسی پزشکی، دانشگاه صنعتی همدان

۳. گروه پزشکی مولکولی، دانشکده فناوری‌های نوین پزشکی، دانشگاه علوم پزشکی ایران

چکیده

تصویربرداری فراصدایی پزشکی به‌دلیل نزدیکی رفتار تومور سرطانی به بافت‌های بدن دارای کنتراست پایینی است. این مشکل توسط روش روزنه اصطناعی (مصنوعی) برای تصویربرداری پی‌گیری شده است. اگرچه فنّ تصویربرداری روزنه‌ی اصطناعی (مصنوعی)، کنتراست پایین تصاویر فراصدایی را در حد خوبی بهبود بخشید، اما عملکرد این روش‌ها حتی زمانی‌که طول داده‌ها کوتاه یا نسبت علامت به نوفه پایین باشد، قابل قبول نیست. روش بیّسی، یک الگوریتم زمانی-مکانی بازسازی تصویر است که به‌منظور جبران عملکرد بد روش‌های وفقی پرتودیسی شکل‌دهی پرتو در نسبت‌های پایین علامت به نوفه پیشنهاد شده است. مزیت اصلی روش بیّسی نسبت به روش‌های تصویربرداری روزنه اصطناعی (مصنوعی) در استفاده از یک تابع توزیع پیش تعریف‌شده می‌باشد که به بازسازی تصویر کمک می‌کند. در این پژوهش، از معیارهای (تخمین‌گر) کم‌ترین میانگین مربعات خطا (اِمِاِمِاِس‌ایی) و بیش‌ترین احتمال پسین (اِمِاِی‌پی) به‌منظور بازسازی تصویر خروجی استفاده شده است. نتایج نشان دادند که در مقایسه با روش‌های متعارف، برای نسبت علامت‌به‌نوفه ۲۰ دسی‌بل، روش پیشنهادشده لوب‌های فرعی را در خارج اهداف نقطه‌ای حدود ۲۳ دسی‌بل بهبود بخشیده است. به‌علاوه این مقایسه بهبود ۱۸ دسی‌بل و ۸۲ درصدی را به‌ترتیب در مؤلفه‌های سی‌آر و سی‌اِن‌آر برای فانتوم کیست نشان می‌دهد.

کلیدواژه‌ها: روش بیّسی، پرتودیسی (شکل‌دهی پرتو)، تابع توزیع.

۱. مقدمه

تصویربرداری فراصدای پزشکی به‌دلیل نزدیک بودن ماهیت بافت‌های مختلف بدن به هم، انرژی کم موج تابشی، تضعیف موج فراصدا در بافت و نهایتاً عمق کم نفوذ، دارای کنتراست پایینی می‌باشد [۱]. تصویربرداری فراصدا به روش روزنه‌ی اصطناعی (مصنوعی)[1]، کنتراست پایین تصاویر فراآوا را در حد خوبی بهبود می‌بخشد [۲] اما مشکلات ذیل مانع از توسعه زیاد آن برای تصویربرداری شدند: ۱- روش‌های روزنه اصطناعی (مصنوعی) به بردار جهت a خیلی وابسته هستند و تخمین غیردقیق آن به کلی کارایی آن‌ها را با مشکل مواجه می‌کند [۳]. ۲- روش‌های روزنه اصطناعی (مصنوعی) وفقی و غیروفقی، موقعی که طول داده کم یا علامت به نوفه پایین است، کارایی مناسبی ندارند. در حوزه رادار هنگامی که طول داده کم بوده و یا علامت به نوفه پایین می‌باشد از روش‌های بیّسی به کرات برای بازسازی تصویر بهره برده شده است [۴].

به‌طور کلی تحقیقات صورت گرفته در زمینه بهره‌گیری از توابع تخمین بیّسی برای بهبود کیفیت تصاویر را می‌توان در دو دسته، تحقیقات صورت گرفته در حوزه رادار و گفتار (غیرفراصدا) و تحقیقات صورت گرفته در حوزه فراصدا دسته‌بندی کرد. در حوزه رادار این روش زیاد مورد استفاده قرار گرفته و اثر آن در بهبود تصویر خروجی در علامت به نوفه‌های پایین اثبات شده است [۵-۱۰]. در حوزه فراصدا استفاده از این روش در مراحل ابتدایی قرار دارد. اگر چه هیچ مرجعی از تخمین‌گرهای بیّسی به‌منظور بهبود کیفیت تصاویر فراصدای پزشکی در اِس‌اِن‌آر[2]های پایین استفاده نکرده است اما به ذکر مراجعی که حداقل این نظر را مطرح کرده‌اند پرداخته می‌شود [۱۱-۱۲].

* نویسنده پاسخگو: mb.khodabakhshi@hut.ac.ir

[1] Synthetic aperture

[2] SNR

لازوراو در مرجع [۵]، برای اولین‌بار الگوریتم کم‌ترین میانگین مربعات خطا (اِمِاِمِاِس‌ایی)[1] را در حوزه رادار و برای بازسازی تصاویر روزنه اصطناعی (مصنوعی) به‌کار برد. برای این منظور او روش اِمِاِمِاِس‌ایی بازگشتی را با روش کالمن ترکیب کرد و اثبات کرد که تخمین‌گر اِمِاِمِاِس‌ایی می‌تواند در کنار صافی (فیلتر) کالمن برای بهبود بازیابی روش تصویربرداری روزنه اصطناعی (مصنوعی) در حوزه رادار مورد استفاده قرار گیرد. اگرچه استفاده از تخمین‌گر بیّسی در کنار روش کالمن باعث بهبود بازیابی تصویر شد اما بازگشتی‌بودن پروسه تخمین باعث تحمیل پیچیدگی محاسبات بیش‌تر به روش روزنه اصطناعی (مصنوعی) گردید [۵]. یو و همکاران از تخمین‌گر بیش‌ترین احتمال پسین (اِمِاِی‌پی)[2] برای تصویربرداری در حوزه رادار به‌صورت کور بهره بردند [۶]. اطلاق واژه کور به این معنی است که اطلاعاتی راجع به محیط تصویربرداری و هم‌چنین نوفه موجود به تخمین‌گر داده نشده است. آن‌ها اثبات کردند که در تعداد تکرار زیاد، روش پیشنهادی می‌تواند به‌صورت کور تصویر خروجی را بازیابی کند اما برای تعداد تکرار کم بازیابی غیرقابل مقایسه با روش فوکوس در حالت دریافت (آرِاف)[3] می‌باشد. فانک و همکاران در مرجع [۷]، روشی را برای حفظ تفکیک‌پذیری (رزولوشن) تصاویر در هنگام کاهش ابعاد براساس روش اِمِاِمِاِس‌ایی ارائه کردند. هدف اصلی آن‌ها جلوگیری از آرتیفکت‌های رنگی با حفظ تیزی لبه‌ها با استفاده از روش اِمِاِمِاِس‌ایی در تصاویر کوچک‌شده بود. نتایج بیانگر این حقیقت هستند که روش اِمِاِمِاِس‌ایی توانسته اطلاعات مهم تصویر مانند لبه‌ها را کامل حفظ کند [۷]. در مرجع [۸] دونگ و همکاران بار دیگر تخمین‌گرهای بیّسی (اِمِاِی‌پی) را برای بهبود روش تصویربرداری روزنه اصطناعی (مصنوعی) در حوزه رادار مورد استفاده قرار دادند. آن‌ها به‌منظور کاهش پیچیدگی محاسبات روزنه اصطناعی (مصنوعی) از روش کاهش نرخ نمونه‌برداری از داده‌های دریافت‌شده توسط آرایه دریافت استفاده کردند. هم‌چنین برای جبران اثر این کاهش نرخ نمونه‌برداری از روش اِمِاِی‌پی استفاده شد. ناگاراج و همکاران از تخمین‌گر بیّسی اِمِاِمِاِس‌ایی به‌منظور نوفه‌زدایی، نوفه اسپکل زمینه در تصاویر فراصدایی شریان کاروتید استفاده کردند [۹]. در این پژوهش ادعا شده است که استفاده از روش بیّسی اِمِاِمِاِس‌ایی در فضای لگاریتمی می‌تواند باعث سرکوب نوفه اسپکل زمینه شود و کیفیت تصاویر فراصدایی کاروتید را بهبود بخشد.

اوانا و همکارانش در مرجع [۱۰] از روش یادگیری بیّسی به‌منظور افزایش نرخ قاب (فریم) در تصویربرداری فراصدایی پزشکی استفاده کردند. در این پژوهش ادعا شده که برای افزایش نرخ قاب (فریم) می‌توان به جای ارسال به‌وسیله تمامی عناصر آرایه ارسال، فقط از تعدادی از آن‌ها استفاده کرد و برای جبران این کاهش کنتراست حاصل از ارسال به‌وسیله تعداد کم‌تری از عناصر ارسال از روش یادگیری بیّسی استفاده کرد.

در مرجع [۱۱]، فردریک و همکاران برای اولین‌بار از الگوی بیّسی به‌منظور بازسازی تصاویر فراصدایی میدان دور استفاده کردند. با توجه به اینکه الگوی پیشنهادشده در این مرجع به‌صورت خطی می‌باشد و صرفاً با اعمال چند ترم کانولوشن بر روی علامت عناصر آرایه ارسال، می‌توان به علامت عناصر آرایه دریافت رسید. در نتیجه این طرح به ذهن می‌رسد که الگوی خطی پیشنهادی آن‌ها به حوزه فراصدا، میدان نزدیک و نرم‌افزار فیلد II[4] نگاشت شود تا بهبودهای آن روی تصویر خروجی به حوزه فراصدا و برای بهبود تصاویر فراصدایی مورد استفاده واقع شود. در این پژوهش از الگوهای بیّسی به‌منظور تصویربرداری فراصدایی پزشکی میدان نزدیک بهره گرفته شد و الگوی پیشنهادی برای بافت شبیه‌سازی‌شده مورد آزمایش قرار گرفت و اثبات شد که در علامت به نوفه‌های پایین روش پیشنهادی این پژوهش می‌تواند جایگزینی برای روش‌های شکل‌دهی پرتو ثابت و وفقی باشد.

۲. مواد و روش‌ها

۲-۱. الگوی خطی پیشنهادی برای ثبت داده

[1] MMSE; Minimum Mean Square Error
[2] MAP; Maximum A Posterior
[3] RF
[4] Field II

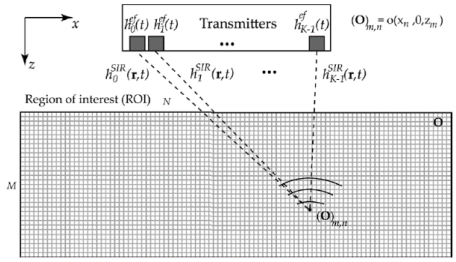
اگر همانند شکل زیر M*N پیکسل واقع‌شده در ناحیه مطلوب[1] در نظر گرفته شوند و اگر فرض شود که k عنصر ارسال و L عنصر دریافت وجود دارند و اگر نمادهای شکل ۱ بیانگر موارد زیر باشند:

$h_k^{f-SIR}(r, t)$: پاسخ ضربه مکانی برای عنصر k-اُم ارسال.

$h_l^{b-SIR}(r, t)$: پاسخ ضربه مکانی برای عنصر l- اُم دریافت.

$h_k^{ef}(t)$: پاسخ الکترومکانیکی برای عنصر k-اُم ارسال.

$h_l^{eb}(t)$: پاسخ الکترومکانیکی برای عنصر l- اُم دریافت.



شکل ۱ الگوی خطی پیشنهادی به‌منظور ثبت داده پیکسل واقع‌شده در مکان (m,n) [۱۱].

در این حالت پاسخ حاصل از پیکسل واقع‌شده در مکان (m,n) برای عنصر l- اُم آرایه دریافت، هنگامی‌که کل عناصر ارسال فعال هستند به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$y_l(r, t) = \Big(\overbrace{\sum_{k=0}^{k-1} h_l^{f-SIR}(r, t) * h_k^{ef}(t)}^{\text{پاسخ ضربه ارسال}} * u_k(t)\Big) o(r) * \Big(\underbrace{h_l^{b-SIR}(r, t) * h_l^{eb}(t)}_{\text{پاسخ ضربه دریافت}}\Big) + e_l(t) \quad (۱)$$

که در رابطه بالا، $u_k(t)$ علامت ورودی، O(r) دامنه اسکترینگ مربوط به سلول (m,n) و $y_l(r, t)$ پاسخ عنصر λ-اُم دریافت می‌باشند. پاسخ‌های ضربه ارسال و دریافت را می‌توان به‌صورت یک پاسخ واحد به‌صورت زیر نوشت:

$$y_l(r, t) = h^f(r, t) * h_l^b(r, t)\, o(r) + e_l(t) \quad (۲)$$

$$y_l(r, t) = h_l(r, t)\, o(r) + e_l(t) \quad (۳)$$

که $h_l(r, t)$ پاسخ ضربه سامانه است. اگر محیط تصویربرداری به‌صورت دوبعدی در نظر گرفته شود و این محیط به M*N پیکسل تقسیم‌بندی شود، در نتیجه پاسخ گسسته مربوط به عنصر l- اُم آرایه دریافت به‌صورت زیر قابل بازنویسی خواهد بود:

$$y_l^{(m,n)} = h_l^{(m,n)}(O)_{m,n} + e_l \quad (۴)$$

که در رابطه بالا $(O)_{m,n}$ پاسخ اسکترینگ (دامنه) حاصل از سلول واقع‌شده در مکان $r = (x_n, \cdot, z_m)$ می‌باشد. اگر کل سلول‌های محیط آرأآی[2] در نظر گرفته شوند در نتیجه داریم:

$$y_l = \sum_{m,n} h_l^{(m,n)}(O)_{m,n} + e_l \quad (۵)$$

$$= [h_l^{(\cdot,\cdot)} \; h_l^{(\cdot,\cdot)} \dots h_l^{(M-1,N-1)}]\, o + e_l = P_l o + e_l \quad (۶)$$

اگر کل عناصر آرایه دریافت در نظر گرفته شوند در نتیجه رابطه (۷) بدست می‌آید:

$$y = \begin{bmatrix} y_\cdot \\ y_\cdot \\ \vdots \\ y_{L-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_\cdot \\ P_\cdot \\ \vdots \\ P_{L-1} \end{bmatrix} O + \begin{bmatrix} e_\cdot \\ e_\cdot \\ \vdots \\ e_{L-1} \end{bmatrix} = PO + e \quad (۷)$$

در رابطه بالا y بیانگر ماتریس مشاهدات یا علامت عناصر آرایه دریافت می‌باشد. اگر عناصر آرایه دریافت از علامت رسیده به آن‌ها K نمونه برداشته باشند در نتیجه ماتریس مشاهدات y دارای اندازه K*L خواهد بود. P ماتریس انتشار می‌باشد که شامل پاسخ ضربه از آرایه ارسال تا آرایه دریافت خواهد بود. ماتریس P دارای اندازه KL*MN می‌باشد. O دامنه‌های قرار گرفته‌شده روی هر پیکسل از ناحیه آرأآی می‌باشد و دارای سایز M*N است و e نوفه اضافه‌شده به مشاهدات است.

۲-۲. استخراج ماتریس‌های الگو در نرم‌افزار فیلد II

در محیط فیلد II، مشاهدات y معلوم می‌باشند و هدف تخمین دامنه قرار گرفته‌شده روی پیکسل‌های محیط آرأآی می‌باشد ($\hat{O}$). برای به‌دست آوردن شدت روشنایی (دامنه) روی پیکسل (m,n) می‌توان نوشت:

$$(\hat{O})_{m,n} = \sum_{l=\cdot}^{L-1} w_l\, y(x_l, \tau_l(x_n, z_m)) \quad (۸)$$

که در رابطه بالا $\hat{O}_{m,n}$ دامنه تخمین‌زده‌شده روی پیکسل (m,n)، $y(x_l)$ علامت تأخیر داده‌شده عنصر l- اُم آرایه دریافت برای پیکسل (m,n)، $\tau_l(x_n, z_m)$ تأخیر متناسب با پیکسل (m,n) و w_l وزن متناسب با عنصر l- اُم آرایه دریافت می‌باشند. در حوزه فراصدا رابطه بالا را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

[1] Region of inerest

[2] ROI

$$(\hat{O})_{m,n} = \sum_{l=0}^{L-1} w_l y_l^T d_l^{(m,n)} \qquad (۹)$$

که در رابطه بالا y_l بیانگر علامت دریافت‌شده توسط عنصر l- اُم آرایه دریافت و $d_l^{(m,n)}$ تأخیر متناسب با پیکسل (m,n) برای عنصر l- اُم آرایه دریافت می‌باشد. در واقع تأخیر $d_l^{(m,n)}$ را می‌توان به‌صورت یک بردار با اندازه K*1 در نظر گرفت که یکی از درایه‌های آن ۱ و بقیه صفر می‌باشند. مکان درایه ۱ روی بردار $d_l^{(m,n)}$ را می‌توان با استفاده از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$a = \tau_l(x_n, z_m) \times f_s = \left(\frac{2}{c_p}\sqrt{(x_l - x_n)^2 + z_m^2}\right) \times f_s \qquad (۱۰)$$

در نتیجه رابطه (۱۰) به‌صورت زیر قابل بازنویسی خواهد بود:

$$\hat{O}_{m,n} = \begin{bmatrix} w_0 d_0^{(m,n)} \\ w_1 d_1^{(m,n)} \\ \vdots \\ w_{L-1} d_{L-1}^{(m,n)} \end{bmatrix}^T y \qquad (۱۱)$$

اگر کل پیکسل‌های ناحیه آرأآی در نظر گرفته شوند در نتیجه خواهیم داشت:

$$\hat{O} = \begin{bmatrix} w_0 d_0^{(0,0)} & \dots & w_0 d_0^{(M-1,N-1)} \\ w_1 d_1^{(0,0)} & \dots & w_1 d_1^{(M-1,N-1)} \\ & \vdots & \\ w_{L-1} d_{L-1}^{(0,0)} & \dots & w_{L-1} d_{L-1}^{(M-1,N-1)} \end{bmatrix}^T y \qquad (۱۲)$$

$$\hat{O} = K_d y \qquad (۱۳)$$

از مقایسه روابط (۷) و (۱۳) به‌وضوح مشخص است که زمانی که نوفه وجود ندارد $P = K_d^{-1}$ می‌باشد. از طرفی ماتریس K_d بیانگر تأخیر سمپلی می‌باشد که متناسب با هر یک از پیکسل‌ها محاسبه می‌شود. این تأخیر سمپلی متناسب با زمانی است که طول می‌کشد تا موج از آرایه ارسال به پیکسل واقع‌شده در نقطه کانونی و از آنجا جذب آرایه دریافت شود. در نتیجه بدیهی است که ماتریس K_d به دو مورد بستگی دارد؛ ۱. مکان پیکسل (m,n)، ۲. مکان عناصر ارسال و دریافت.

موارد ۱ و ۲ در صورت وجود یا عدم‌وجود نوفه تفاوتی نمی‌کنند در نتیجه شکل‌گیری ماتریس K_d مستقل از نوفه خواهد بود و به مکان پیکسل‌ها و مکان عناصر آرایه بستگی دارد. در نتیجه در حالت وجود نوفه در محیط هم می‌توان از فرض $P = K_d^{-1}$ بهره برد به‌شرطی که ماتریس K_d معکوس‌پذیر باشد.

در واقع اگر ماتریسی محاسبه شود که در ماتریس مشاهدات y ضرب شود و تخمین دامنه ناحیه آرأآی را نتیجه دهد این ماتریس همان ماتریس K_d خواهد شد. با معلوم بودن K_d و معکوس‌کردن آن می‌توان ماتریس انتشار P را به‌راحتی محاسبه کرد. در نتیجه یکی از مجهول‌های اصلی و مهم الگوریتم بیّسی با این روش قابل محاسبه خواهد بود.

۲-۳. نظریه الگوریتم بیّسی

هدف الگوریتم بیّسی این است که صرفاً با استفاده از اطلاعات بیش‌تر (خواص آماری نوفه و دامنه اسکتررها مانند میانگین و واریانس) تصویر خروجی را تا حد ممکن نوفه‌زدایی کند. این اطلاعات به‌صورت زیر خلاصه می‌شوند:

الف) نوفه اضافه‌شده به‌علامت عناصر آرایه، نوفه سفید گاوسی باشد. علت اینکه نوفه باید نوفه سفید گاوسین باشد این است که اولاً میانگین آن صفر است و هم‌چنین ماتریس کواریانس مکانی آن به‌صورت قطری خواهد شد. در روش‌های تصویربرداری فازی با توجه به اینکه توان یا انرژی موج صوتی در محل فوکال پوینت (نقطه فوکوس آرایه) زیاد است در نتیجه علامت به نوفه در آن مکان‌ها بیش‌تر است. در روش‌های تصویربرداری روزنه اصطناعی (مصنوعی) با توجه به اینکه آرایه تصویربرداری جایی در تصویر فوکوس داده نمی‌شود و فوکوس به‌صورت دینامیکی صورت می‌گیرد در نتیجه انرژی عناصر آرایه دریافت تغییرات زیادی ندارد. با توجه به اینکه نوفه استفاده‌شده در این پژوهش نوفه سفید گاوسین است و با توجه به اینکه ماتریس کواریانس مکانی نوفه به‌صورت قطری در خواهد آمد (نوفه‌های اضافه‌شده به علامت عناصر آرایه دریافت از هم مستقل هستند) در نتیجه برای محاسبه واریانس نوفه از میانگین واریانس‌های قرار گرفته‌شده روی قطر اصلی ماتریس کواریانس مکانی نوفه استفاده شد.

ب) دامنه اسکتررهای تعریف‌شده (o) باید مثبت باشند.

الگوریتم بیّسی این کار را با استفاده از تابع چگالی احتمال p(o|y,I) انجام می‌دهد که در آن o دامنه پیکسل‌های ناحیه آرأآی، y علامت مشاهدات عناصر آرایه دریافت و I بیانگر اطلاعاتی (خواص آماری نوفه سفید و دامنه اسکتررها) است که راجع به o معلوم می‌باشد. تابع چگالی

احتمال $p(o|y,I)$ بیانگر احتمالی است که با وجود اطلاعات y و I، ماتریس تصویر o تخمین زده شود.

الگوی بیّسی با استفاده از دو تخمین‌گر اِم‌اِی‌پی و اِم‌اِم‌اِس‌ایی این کار را انجام می‌دهد. تخمین‌گر اِم‌اِم‌اِس‌ایی یک تخمین‌گر خطی و تخمین‌گر اِم‌اِی‌پی یک تخمین‌گر غیرخطی می‌باشند. تخمین‌گر اِم‌اِم‌اِس‌ایی با کمینه‌کردن رابطه زیر، ماتریس تصویر خروجی را تخمین می‌زند:

$$\hat{o}_{MMSE} = \underset{o}{\arg\min}\ E\left\{\|o-\hat{o}\|^{2}\right\} \qquad (۱۴)$$

اگر فرض شود که تخمین خطی شدت روشنایی روی پیکسل‌های ناحیه آرآآی در الگوی اِم‌اِم‌اِس‌ایی به‌صورت زیر بیان شود:

$$\hat{o} = Ky \qquad (۱۵)$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$K_{LMMSE} = \underset{K}{\arg\min}\ E\left\{\|o-Ky\|^{2}\right\} \qquad (۱۶)$$

با جای‌گذاری y=Po+e در رابطه بالا و کمینه‌کردن رابطه نسبت به K، می‌توان اثبات کرد که ماتریس K_{MMSE} از رابطه زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$K_{MMSE} = C_o P^T (P C_o P^T + C_e)^{-1} \qquad (۱۷)$$

در رابطه بالا $C_o = E(oo^T)$ بیانگر ماتریس کواریانس دامنه اسکتررها، $C_e = E(ee^T)$ بیانگر ماتریس کواریانس نوفه و P بیانگر ماتریس انتشار می‌باشد.

اگر نوفه اضافه‌شده، نوفه سفید گاوسی با ماتریس کواریانس نوفه $C_e = \sigma_e^2 I$ و ماتریس کواریانس دامنه اسکتررها به فرمت $C_o = \sigma_o^2 I$ در نظر گرفته شوند در نتیجه رابطه (۱۷) به‌صورت زیر ساده خواهد شد:

$$K_{MMSE} = P^T (P P^T + \mu I)^{-1} \qquad (۱۸)$$

که در رابطه بالا $\mu = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_o^2}$ در نظر گرفته می‌شود.

در این پژوهش واریانس نوفه به‌صورت میانگین واریانس‌های قرار گرفته‌شده روی قطر اصلی ماتریس کواریانس مکانی نوفه محاسبه شد. هم‌چنین با توجه به اینکه دامنه نقاط اسکترر استفاده‌شده برابر واحد در نظر گرفته شدند در نتیجه واریانس تصویر برای ناحیه آرآآی با تعداد M*N پیکسل به‌صورت زیر محاسبه شد:

$$\sigma_o^2 = \frac{1}{MN} \qquad (۱۹)$$

هم‌چنین با جای‌گذاری K_{MMSE} محاسبه‌شده در رابطه (۲۰) ماتریس تصویر خروجی با تخمین‌گر اِم‌اِم‌اِس‌ایی تخمین‌زده خواهد شد:

$$\hat{o}_{MMSE} = K_{MMSE}\, y \qquad (۲۰)$$

در حالت بازیابی تصویر با استفاده از تخمین‌گر اِم‌اِی‌پی دو روی‌کرد وجود دارد [۱۲]:

۱. نوفه اضافه‌شده (e) و هم‌چنین دامنه نقاط اسکترر (o) هر دو دارای توزیع گاوسین هستند. در این حالت قابل اثبات است که ماتریس K_{MAP} به‌صورت زیر قابل بازیابی خواهد بود [۱۲]:

$$K_{MAP} = (C_o^{-1} + P^T C_e^{-1} P)^{-1} P^T C_e^{-1} \qquad (۲۱)$$

در رابطه بالا $C_o = E(oo^T)$ بیانگر ماتریس کواریانس دامنه اسکتررها، $C_e = E(ee^T)$ بیانگر ماتریس کواریانس نوفه و P بیانگر ماتریس انتشار می‌باشند. اگر فرض شود که نوفه اضافه‌شده به عناصر آرایه دریافت، نوفه سفید گاوسی با ماتریس کواریانس نوفه $C_e = \sigma_e^2 I$ و ماتریس کواریانس دامنه اسکتررها به صورت $C_o = \sigma_o^2 I$ باشند، در نتیجه رابطه (۲۱) به‌صورت رابطه (۲۲) ساده خواهد شد.

$$K_{MAP} = (\mu\mu + P^T P)^{-1} P^T \qquad (۲۲)$$

که در رابطه بالا $\mu = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_o^2}$ در نظر گرفته شد. به‌وضوح مشخص است در حالتی که نوفه و تابع توزیع دامنه اسکتررها دارای توزیع گاوسین باشند تخمین‌گرهای اِم‌اِم‌اِس‌ایی و اِم‌اِی‌پی بر هم منطبق خواهند شد. با جای‌گذاری K_{MAP} محاسبه‌شده در رابطه (۲۳) ماتریس تصویر خروجی با تخمین‌گر اِم‌اِی‌پی تخمین‌زده خواهد شد:

$$\hat{o}_{MMSE} = \hat{o}_{MAP} = K_{MAP}\, y \qquad (۲۳)$$

۲. نوفه اضافه‌شده (e) دارای توزیع گاوسین و دامنه نقاط اسکترر (o) دارای توزیع نمایی و مثبت باشند.

اگر فرض شود که تابع توزیع دامنه اسکتررها به‌صورت نمایی و به‌صورت زیر است:

$$P(o \mid I) = \prod_{i=0}^{MN-1} \lambda_0 \exp(-\lambda_0 o_i) \qquad (۲۴)$$

و e دارای تابع توزیع گوسین باشد در نتیجه تابع توزیع احتمال $p(o|y,I)$ با رابطه (۲۵) متناسب خواهد بود:

$$p(o \mid y, I) \propto \frac{1}{(2\pi)^{\frac{MN}{2}} |C_e|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y-Po)^T C_e^{-1}(y-Po)\right) \prod_{i=0}^{MN-1} \lambda_0 \exp(-\lambda_0 o_i) \qquad (۲۵)$$

که در آن λ_o بیانگر میانگین روی ناحیه o می‌باشد. تخمین اِم‌اِی‌پی می‌تواند با بیشینه کردن رابطه (۲۵) نسبت به o با شرط این‌که تمامی o_iها مثبت باشند به‌دست آید. این استدلال می‌تواند به‌صورت رابطه (۲۶) بازنویسی شود.

$$\hat{o}_{MAP} = \underset{o}{\operatorname{argmax}}\ p(o \mid y, I) = \underset{o}{\operatorname{argmax}}\ p(o \mid I)\, p(y \mid o, I) \qquad (۲۶)$$

بیشینه‌کردن رابطه بالا برابر با کمینه‌کردن منفی لگاریتم رابطه (۲۶) است. در نتیجه رابطه (۲۷) بدست می‌آید:

$$-\log p(o \mid y, I) = c + \frac{۱}{۲}(y - Po)^T C_e^{-1}(y - Po) + \sum_{i=۰}^{MN-1} \sigma_o^۲ o_i \qquad (۲۷)$$

$$= c + \frac{۱}{۲}(y - Po)^T C_e^{-1}(y - Po) + \lambda_o 1^T o \qquad (۲۸)$$

در نتیجه:

$$\hat{o} = \underset{o_i > 0 \ \forall i}{\operatorname{argmin}} \left(\frac{۱}{۲}(y - Po)^T C_e^{-1}(y - Po) + \lambda_o 1^T o\right) \qquad (۲۹)$$

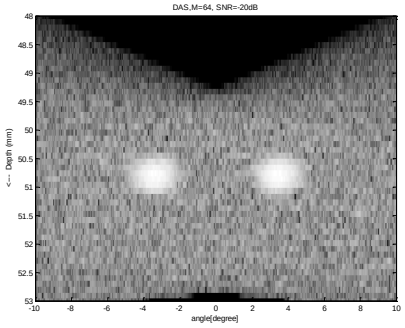
در متلب یک جعبه ابزار برای حل معادلات درجه دوم با شرایط مثبت و هم‌چنین شرایط معادله‌ای وجود دارد. در این پژوهش هم برای حل معادله بالا از این جعبه ابزار استفاده شد.

۳. نتایج و بحث

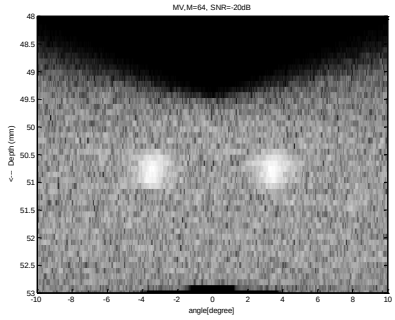
در این تحقیق از آرایه‌ی ۶۴ عنصری، به‌طول ۱۶ میلی‌متر، ارتفاع ۵ میلی‌متر و بسامد مرکزی ۳ مگاهرتز استفاده شد. هم‌چنین محدوده دینامیکی تغییرات شدت روشنایی ۶۰ دسی‌بل بود. نرم‌افزار فیلد II برای شبیه‌سازی مورد استفاده قرار گرفت [۱۳]. شبیه‌سازی‌ها براساس این فرضیات انجام‌شده که توزیع نوفه گوسی و توزیع اسکتررها توزیع نمایی می‌باشند.

۳-۱. اعتبارسنجی بهبود روش‌های بیّسی نسبت به روش‌های شکل‌دهی پرتو معمولی برای فانتوم نقطه‌ای

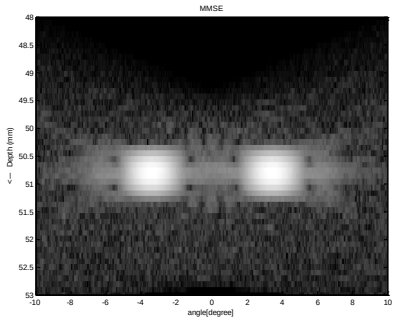
در هر چهار الگوریتم تأخیر و جمع (دی‌اِی‌اِس)[1]، کمینه واریانس (اِم‌وی)[2]، روش اِم‌اِم‌اِس‌ایی و اِم‌اِی‌پی، از فانتوم دو نقطه‌ای (اسکترر[3]) در مکان ۱۰۰۰/[۰،۳، ۰،۵۰؛ ۳،۰، ۵۰-] استفاده شد. خروجی الگوریتم‌های تأخیر و جمع و روش کمینه واریانس برای حالت SNR=-۲۰dB، SNR=۰dB و تعداد ۶۴ عنصر در شکل ۲ و ۳ نشان داده شده‌اند.



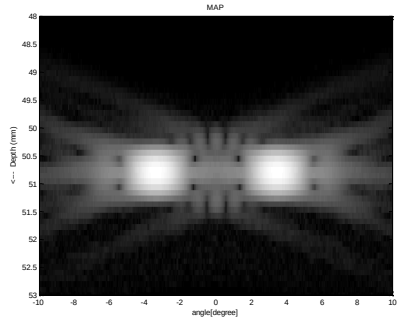
(الف)



(ب)



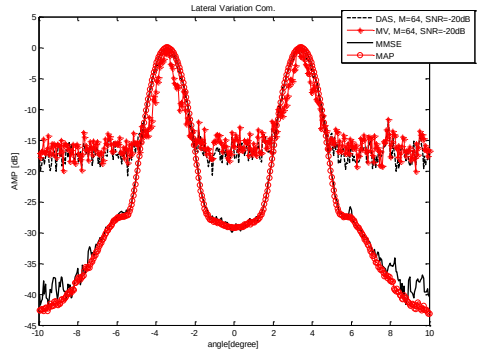
(ج)



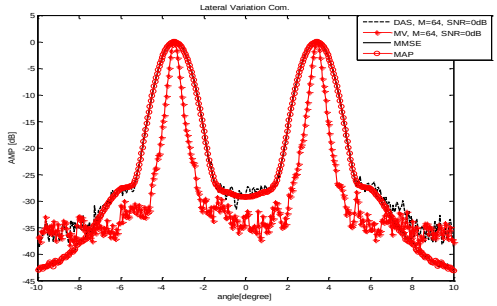
(د)

شکل ۲ (الف): خروجی الگوریتم دی‌اِی‌اِس برای SNR=-۲۰dB، (ب): خروجی الگوریتم اِم‌وی برای SNR=-۲۰dB، (ج): بازیابی با الگوریتم اِم‌اِم‌اِس‌ایی، برای SNR=-۲۰dB، (د): بازیابی با الگوریتم اِم‌اِی‌پی، برای SNR=-۲۰dB.

[1] DAS; Delay and Sum
[2] MV; Minimum Variance
[3] Scatterer



(الف)



(ب)

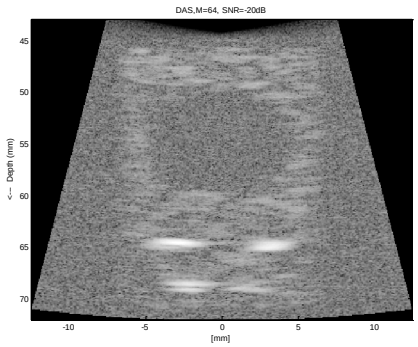
شکل ۳ (الف): مقایسه بین الگوی جهت روش دی‌ای‌اِس و اِموی با بازیابی به روش‌های اِمِ‌اِمِ‌اِس‌ایی و اِمِ‌ای‌پی، برای SNR=-۲۰dB.
(ب): مقایسه الگوی بین جهت روش دی‌ای‌اِس و اِموی با بازیابی به روش‌های اِمِ‌اِمِ‌اِس‌ایی و اِمِ‌ای‌پی برای SNR=-۲۰dB.

همان‌طورکه در شکل‌های ۲ و ۳ نشان داده شده، واضح است که حضور نوفه در محیط باعث تأثیر بر تصویر خروجی تأخیر و جمع و روش کمینه واریانس گردیده است. با توجه به اینکه در اینجا علامت به نوفه کم است در نتیجه این تأثیر زیاد می‌باشد و در کل باعث شده که عملکرد این الگوریتم‌ها خراب شود. شکل‌های ۲-(ج) و ۲-(د) بازیابی با استفاده از الگوریتم‌های بیّسی را نشان می‌دهند. از شکل واضح است که هر دو الگوریتم اِمِ‌اِمِ‌اِس‌ایی و اِمِ‌ای‌پی توانسته‌اند به‌خوبی نوفه موجود را سرکوب کنند و تصویر خروجی را نوفه‌زدایی کنند. از مقایسه تغییرات جانبی شکل ۳-(الف) به‌وضوح مشخص است که اولاً روش اِموی بهبودی از نقطه‌نظر سرکوب لوب‌های فرعی چه در داخل دو منبع و چه در خارج آن‌ها نسبت به روش دی‌ای‌اِس نداشته است. ثانیاً کاهش سی‌اِن‌آر باعث مختل‌شدن کارایی روش‌های وفقی شده است و بهبود آن‌ها در سرکوب لوب‌های فرعی و بهبود تفکیک‌پذیری با مشکل مواجه می‌شود. روش‌های بیّسی در داخل و هم در خارج منابع، لوب‌های فرعی را نسبت به روش دی‌ای‌اِس و روش وفقی کمینه واریانس بهتر سرکوب کرده‌اند. این سرکوب در ناحیه داخل منابع حدود ۱۰ دسی‌بل و در ناحیه خارج منابع حدود ۲۳ دسی‌بل می‌باشد. از مقایسه روش‌های بیّسی با هم، مشخص است که روش اِمِ‌ای‌پی هم در ناحیه داخل منابع و هم در ناحیه خارج منابع، بهتر از روش اِمِ‌اِمِ‌اِس‌ایی عمل کرده و لوب‌های فرعی و نوفه زمینه را بهتر سرکوب کرده است. شکل ۳-(ب)، مقایسه تغییرات جانبی برای الگوریتم دی‌ای‌اِس و اِموی را برای SNR=۰dB نشان می‌دهد از شکل واضح است که برای SNR=۰dB، در داخل دو اسکترر روش‌های بیّسی مانند روش دی‌ای‌اِس عمل کرده‌اند اما در خارج دو منبع بهتر از روش‌های دی‌ای‌اِس و اِموی لوب‌های فرعی را سرکوب کرده‌اند. مقایسه شکل ۳-(الف) برای SNR=-۲۰dB و ۳-(ب) برای SNR=۰dB بیانگر این حقیقت هستند که هر چه مقدار سی‌اِن‌آر پایین‌تر بیاید روش اِمِ‌ای‌پی نسبت به روش اِمِ‌اِمِ‌اِس‌ایی بهتر بازیابی تصویر را انجام می‌دهد.

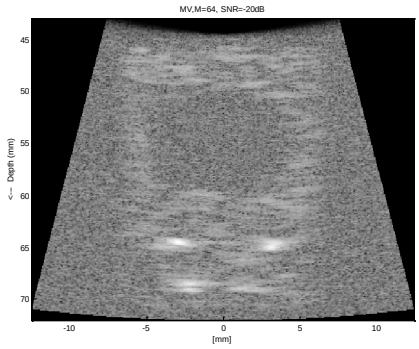
۳-۲. اعتبارسنجی بهبود روش‌های بیّسی نسبت به روش‌های شکل‌دهی پرتو معمولی برای فانتوم کیست

به‌منظور مقایسه کنتراست روش‌های دی‌ای‌اِس و اِموی نسبت به روش‌های بیّسی از یک فانتوم مرکب شامل یک کیست به شعاع ۵ میلی‌متر در عمق ۵۴ میلی‌متر و اهداف سیمی به شعاع‌های ۰/۴ میلی‌متر در اعماق ۶۴ میلی‌متر و ۶۸ میلی‌متر استفاده شد. شکل‌های ۴ و ۵ نتایج حاصل از مقایسه روش‌های دی‌ای‌اِس و اِموی نسبت به روش‌های بیّسی برای SNR=-۲۰dB را نشان می‌دهد.

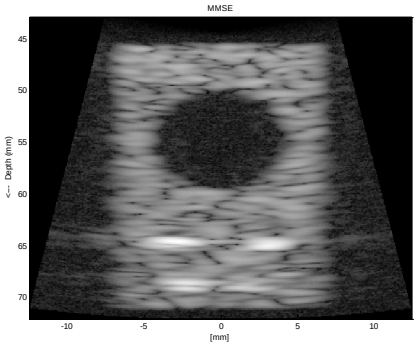
از شکل واضح است که روش‌های بیّسی توانسته‌اند اولاً سفیدی خارج کیست را نسبت به روش دی‌ای‌اِس حفظ کنند و ثانیاً داخل کیست را نسبت به این الگوریتم سیاه‌تر بازیابی کنند که به‌معنی کنتراست بهتر روش‌های بیّسی نسبت به روش‌های دی‌ای‌اِس و اِموی می‌باشد. از مقایسه شکل‌های ۴-(الف) و ۴-(ب) مشخص است که در این اِس‌اِن‌آر عملکرد روش‌های دی‌ای‌اِس و اِموی بسیار بد می‌باشد و کیست موجود کاملاً با نوفه پوشانده شده است.



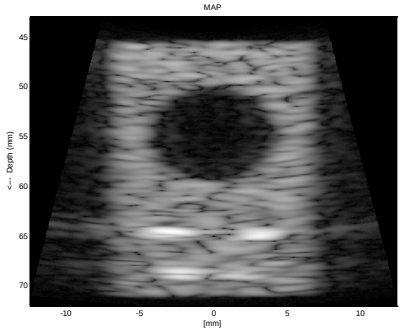
(الف)



(ب)

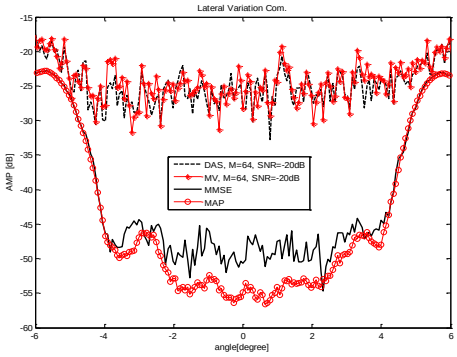


(ج)



(د)

شکل ۴ (الف): خروجی الگوریتم دی‌اِی‌اِس برای SNR=-۲۰dB، (ب): خروجی الگوریتم اِموی برای SNR=-۲۰dB، (ج): بازیابی با الگوریتم اِم‌اِم‌اِس‌ایی، (د): بازیابی با الگوریتم اِم‌اِی‌پی.



شکل ۵ مقایسه بین الگوی جهت روش دی‌اِی‌اِس و اِموی با بازیابی به روش های اِم‌اِم‌اِس‌ایی و اِم‌اِی‌پی.

شکل‌های ۴-(ج) و۴-(د) بازیابی با استفاده از الگوریتم‌های اِم‌اِم‌اِس‌ایی و اِم‌اِی‌پی را نشان می‌دهند. از شکل واضح است که این روش‌ها به‌خوبی توانسته‌اند نوفه موجود را سرکوب کنند و لبه‌های کیست را با دقت خوبی بازیابی کنند. به‌منظور مقایسه کمی بهبودهای روش‌های بیّسی نسبت به روش‌های دی‌اِی‌اِس و اِموی از معیارهای سی‌آر[1] و سی‌اِن‌آر[2] در داخل و خارج کیست بهره گرفته شد. مؤلفه سی‌آر به‌صورت قدرمطلق حاصل تفریق میانگین شدت روشنایی در داخل کیست سیاه، نسبت به میانگین شدت روشنایی در خارج از آن تعریف می‌شود [۱۴]. هم‌چنین مؤلفه سی‌اِن‌آر از حاصل تقسیم مؤلفه سی‌آر به انحراف معیار شدت روشنایی در خارج از کیست سیاه، تعریف می‌شود [۱۵].

مقایسه کمی قدرت روش‌های بیّسی در سرکوب نوفه و بازیابی لبه‌های کیست نسبت به روش‌های دی‌اِی‌اِس و اِموی برای SNR=-۲۰dB در جدول ۱ خلاصه شده است. از جدول مشخص است که بهبود روش اِم‌اِی‌پی نسبت به روش اِم‌اِم‌اِس‌ایی بهتر می‌باشد. این روش توانسته مولفه‌های سی‌آر و سی‌اِن‌آر را به‌ترتیب ۲٫۸۴ دسی‌بل و ۱۱٫۵۴ درصد نسبت به روش اِم‌اِم‌اِس‌ایی بهبود دهد.

مقایسه مؤلفه‌های سی‌آر و سی‌اِن‌آر برای روش‌های اِم‌اِم‌اِس‌ایی و دی‌اِی‌اِس، بیانگر بهبود ۱۸٫۵۳ دسی‌بل و ۸۱٫۵۷ درصد روش بیّسی نسبت به روش دی‌اِی‌اِس معمولی می‌باشد. مقایسه مؤلفه‌های سی‌آر و سی‌اِن‌آر برای روش‌های اِم‌اِم‌اِس‌ایی و اِموی، بیانگر بهبود ۱۸٫۸۵ دسی‌بل

[1] CR; Contrast Ratio
[2] CNR; Contrast to Noise Ratio

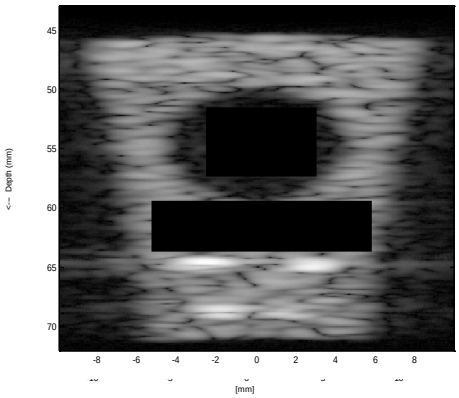
جدول ۱ مقایسه بین کنتراست شکل‌دهنده‌های دی‌اِی‌اِس و اِم‌وی نسبت به روش‌های اِم‌اِم‌اِس‌ایی و اِم‌اِی‌پی برای حالت SNR=-۲۰dB.

شکل‌دهنده	میانگین شدت روشنایی در داخل کیست	میانگین شدت روشنایی در خارج کیست	سی‌آر	Std در خارج کیست	سی‌اِن‌آر
دی‌اِی‌اِس	-۳۱٫۳۹	۲۶٫۶۹	۴٫۷۰	۵٫۲۳	۰٫۸۹
اِم‌وی	-۳٫۷۴	-۲۶٫۳۶	۴٫۳۸	۵٫۲۷	۰٫۸۳
اِم‌اِم‌اِس‌ایی	-۵۱٫۶۰	-۲۸٫۳۶	۲۳٫۲۳	۴٫۸۰	۴٫۸۳
اِم‌اِی‌پی	-۵۴٫۴۳	-۲۸٫۳۶	۲۶٫۰۷	۴٫۷۷	۵٫۴۶

و ۱۸٫۸۲ درصد روش بیّسی نسبت به روش اِم‌وی معمولی می‌باشند.

از شکل ۵ مشخص است که کارایی اصلی روش‌های بیّسی در علامت به نوفه‌های پایین خود را نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل‌ها مشخص است بهبود روش بیّسی نسبت به روش تأخیر و جمع معمولی برای SNR=-۲۰dB کاملاً مشهود است. روش‌های بیّسی توانسته‌اند حدود ۱۸٫۵۳ دسی‌بل علامت به نوفه را بهبود دهند.

شکل ۶، ناحیه در نظر گرفته‌شده برای محاسبه میانگین‌های شدت روشنایی در داخل و خارج کیست، که مربوط به این پژوهش است، را نشان می‌دهد.



شکل ۶ محل محاسبه مؤلفه‌های سی‌آر و سی‌اِن‌آر روی شکل ۴.

۴. نتیجه‌گیری

هدف الگوریتم بیّسی این است که صرفاً با استفاده از یک سری اطلاعات اضافی (خواص آماری نوفه و دامنه اسکتررها مانند میانگین و واریانس) تصویر خروجی را تا حد ممکن نوفه‌زدایی کند. این اطلاعات به‌صورت زیر خلاصه می‌شوند:

۱. نوفه اضافه‌شده به علامت عناصر آرایه، نوفه سفید گاوسی باشد.

۲. دامنه اسکتررهای تعریف‌شده (o) باید مثبت باشند.

الگوریتم بیّسی این‌کار را با استفاده از تابع چگالی احتمال $p(o|y,I)$ انجام می‌دهد که در آن o دامنه پیکسل‌های ناحیه آرأآی، y علامت مشاهدات عناصر آرایه دریافت و I بیانگر اطلاعاتی (خواص آماری نوفه سفید و دامنه اسکتررها) است که راجع به o معلوم می‌باشد. مزیت اصلی روش بیّسی نسبت به روش‌های شکل‌دهی وفقی در استفاده از یک تابع توزیع پیشین می‌باشد و این مزیت هنگامی که سی‌اِن‌آر پایین باشد وارد مسأله می‌شود و به بازسازی تصویر کمک می‌کند. در واقع روش بیّسی با استفاده از اطلاعات پیشین فرض‌شده در مورد دامنه اسکتررها، به تخمین دامنه نقاط تصویر می‌پردازد.

نتایج به وضوح اثبات کردند که برای حالت SNR=-۲۰dB کیفیت تصاویر برای روش‌های بیّسی پیشنهادی بسیار بهتر از روش‌های دی‌اِی‌اِس و اِم‌وی می‌باشند. در واقع بهره‌گیری از تابع توزیع پیشین در الگوریتم‌های بیّسی باعث شد که این روش‌ها بتوانند لبه‌ی تومور را نسبت به روش‌های شکل‌دهی پرتو معمولی بهتر بازیابی کنند و در نتیجه کنتراست بهتری را نتیجه دهند. نتیجه‌ی دیگری که از مقایسه نتایج جدول ۱ قابل استنباط می‌باشد این است که به‌دلیل خاصیت غیرخطی بودن روش اِم‌اِی‌پی، این روش کارایی بهتری در سرکوب نوفه نسبت به روش اِم‌اِم‌اِس‌ایی داشته است.

فهرست منابع

[1] P. Gong, P. Song, S. Chen, “Improved contrast-enhanced ultrasound imaging with multiplane-wave imaging,” IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, vol. 65 , no. 2, 2018.

[2] N. Bottenus, W. Long, H.K. Zhang, M. Jakovljevic, D.P. Bradway, E.M. Boctor, G.E. Trahey, "Feasibility of swept synthetic aperture ultrasound imaging," IEEE Transactions on Medical Imaging, vol. 35, no. 7, 2016.

[3] C.C. Gaudes, I. Santamara, J. Va, E.M. Gmez, T.S. Paules, "Robust array beamforming with sidelobe control using support vector machines," IEEE Transactions Signal Process, vol. 55, no. 2, pp. 574–584, 2007.

[4] G. Rizzo, M. Tonietto, M. Castellaro, B. Raffeiner, A. Coran, U. Fiocco, R. Stramare, E. Grisan, "Bayesian quantification of contrast-enhanced ultrasound images with adaptive inclusion of an irreversible component," IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, vol. 24, no.8, pp. 1620-1630, 2017.

[5] A.D. Lazarov, "Iterative MMSE method and recurrent Kalman procedure for ISAR image reconstruction," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 37, no, 4, 2001.

[6] Y. He , K.-h. Yap, L. Chen, L.-p, Chau, "Blind super-resolution image reconstruction using a maximum a posteriori estimation," IEEE International Conference on Image Processing, pp. 1729-1732, 2006.

[7] L. Fang , C.A. Oscar, K. Tang, X. Wen, H. Wang, "Novel 2-D MMSE subpixel-based image down-sampling," IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, vol. 22, no. 5, 2012.

[8] X. Dong, Y. Zhang, "Sar image reconstruction from undersampled raw data using maximum a posteriori estimation," IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, vol. 8, no. 4, 2015.

[9] Y. Nagaraj, C.S. Asha, A.V. Narasimhadhan, "Assessment of speckle denoising in ultrasound carotid images using least square bayesian estimation approach," Tenth International Conference on Proceedings (TENCON), pp. 1001-1004, 2016.

[10] O. Lorintiu, H. Liebgott, D. Friboulet, "Compressed sensing Doppler ultrasound reconstruction using block sparse Bayesian learning," IEEE Transactions On Medical Imaging, vol. 24, no. 2, 2017.

[11] L. Fredrik, T. Olofsson, "On time-domain model-based ultrasonic array imaging," IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, vol. 54, no. 8, pp. 1623-1633, 2007.

[12] F. Lingvall, "Time-domain Reconstruction Methods for Ultrasonic Array Imaging," Ph.D dissertation, University of Uppsala, 2004.

[13] J.A. Jensen, "Field II: A program for simulating ultrasound systems," Medical Biological Engineering Comput, vol. 34, no. 1, pp. 351-353, 1996.

[14] M. O'donnell, S.W. Flax, "Phase-aberration correction using signals from point reflectors and diffuse scatterers: Measurements," IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Freqency Control, vol. 35, no. 6, pp. 768–774, 1988.

[15] S. Krishnan, K.W. Rigby, M. O'donnell, "Improved esimation of phase aberration profiles," IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Freqency Control, vol. 44, no. 3, pp. 701–713, 1997.

Journal of Acoustical Engineering Society of Iran, Vol. 7, No. 2, 2020

Improving the quality of ultrasound images using Bayesian estimators

N. Hoseinzadeh[1], M.B. Khodabakhshi[*2], Y. Vejgani[3]

1. Department of Electrical and Computer Engineering, Islamic Azad University of Tabriz
2. Department of Electrical and Computer Engineering, Hamedan University of Technology
3. Department of Advanced Technologies in Medicine, Iran University of Medical Sciences

Abstract

Medical ultrasound imaging due to close behavior of cancer tumors to body tissues has a low contrast. This problem with synthetic aperture imaging method has been addressed. Although the synthetic aperture imaging technique solved the low-contrast problem of ultrasound images, to an acceptable limit, but the performance of these methods is not even acceptable when the signal to noise ratio (SNR) is low or the length of data is short. Bayesian method is a time-spatial image reconstruction algorithm proposed to compensate for the poor performance of adaptive Beamforming methods in low signal to noise ratio. The main advantage of the Bayesian methods as compared to synthetic aperture imaging once is due to the use of a pre-defined distribution function wich aids image reconstruction. In this study, the minimum mean squared error (MMSE) and maximum a posteriori (MAP) criteria have been used for image reconstruction.

Keywords: Baysian method, Beamforming, Distribution function.

pp. 28-37 (In Persian)

[*] Corresponding author E-mail: mb.khodabakhshi@hut.ac.ir