

(Research Article)

Reliability of capacitive pressure sensor with silicon carbide and polysilicon materials

Abbas Rahi^{1*}, Ramin Jafari²

^{1*} Assistant Professor, Faculty of Mechanical and Energy Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran,

² MSc, Faculty of Mechanical and Energy Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran.

Revised: 2023/07/03, Accepted: 2024/05/12

Abstract

In this research, a MEMS capacitive pressure sensor is simulated with two materials, silicon and silicon carbide. The purpose of simulating this sensor is to analyze and investigate the effect of various factors such as diaphragm geometry, ambient temperature, manufacturing materials, and manufacturing tolerances on the performance and reliability of the system. The simulations show that the increase in temperature and manufacturing tolerances can change the reliability in the system. The sensor is simulated for two materials, silicon and silicon carbide. Comparison of the simulation results shows that silicon carbide sensor with less stress experience and higher reliability is a more suitable material for making a pressure sensor. Silicon carbide shows 92% reliability and silicon 81% reliability, which means failure of 80 and 190 pieces out of every 1000 pieces, respectively. In the following, fatigue simulations are performed for the pressure sensor diaphragm, and the effect of manufacturing tolerances, diaphragm area and thickness, working pressure, and the type of circular and square diaphragms on the fatigue life is also investigated.

Keywords: Reliability, fatigue life, failure rate, micro-electromechanical systems, silicon carbide.

pp. 77-82 (in persian)

* E-mail: a_rahi@sbu.ac.ir

قابلیت اطمینان حسگر فشار خازنی با دو ماده سیلیکون و کاربید سیلیکون

عباس رهی^{۱*}، رامین جعفری^۲

۱. استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی

۲. کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی

دریافت: ۱۴۰۲/۰۴/۱۲، پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۲۳

چکیده

در این پژوهش یک حسگر فشار خازنی ممز^۱ با دو ماده سیلیکون و کاربید سیلیکون شبیه‌سازی می‌شود. هدف از شبیه‌سازی این حسگر، تحلیل و بررسی تاثیر عوامل مختلف مانند هندسه دیافراگم، دمای محیط، مواد ساخت و همچنین تفرانس‌های ساخت بر روی عملکرد و قابلیت اطمینان سامانه است. شبیه‌سازی‌های انجام شده نشان داد که افزایش دما و تفرانس‌های ساخت باعث تغییر قابلیت اطمینان در سامانه شد. حسگر برای دو ماده سیلیکون و کاربید سیلیکون شبیه‌سازی شد. مقایسه نتایج حاصل از شبیه‌سازی نشان داد که حسگر با جنس کاربید سیلیکون با تجربه تنش کم‌تر و قابلیت اطمینان بالاتر ماده مناسب‌تری برای ساخت حسگر فشار است. کاربید سیلیکون قابلیت اطمینان ۹۲ درصد و سیلیکون قابلیت اطمینان ۸۱ درصد را از خود نشان دادند که به معنای خرابی به ترتیب ۸۰ و ۱۹۰ قطعه از هر ۱۰۰۰ قطعه است. در ادامه شبیه‌سازی‌های خستگی برای دیافراگم حسگر فشار انجام شد و تاثیر مقدار تفرانس‌های ساخت، مساحت و ضخامت دیافراگم، فشار کاری و نوع دیافراگم‌های دایره‌ای و مربعی بر روی عمر خستگی نیز مورد بررسی قرار گرفت.

کلیدواژه‌ها: قابلیت اطمینان، عمر مفید، نرخ خرابی، سامانه‌های میکروالکترومکانیکی، کاربید سیلیکون.

۱. مقدمه

ریز فناوری در ممز تلفیقی از اجزای مکانیکی، حسگرها، و اجزای الکتریکی می‌باشند. این سامانه‌ها، شامل یک واحد مرکزی برای پردازش داده‌ها، و اجزای مختلف دیگری هستند که با محیط اطراف تعامل دارند. با پیشرفت روز افزون ممز و استفاده از این نوع ریز فناوری‌ها در صنایعی مانند خودروسازی یا هوافضا نیاز به شناخت این نوع سامانه‌ها به ویژه تخمین مقدار عمر و قابلیت اطمینان آن‌ها بیش‌تر شده‌است. مدارهای مجتمع میکروالکترونیک به عنوان مغز متفکر یک ممز است که تصمیم‌گیری در آن‌ها بر اساس اطلاعات اخذ شده از حسگرها، انجام می‌شود [۱]. اطمینان‌پذیری یا قابلیت اعتماد، درصد کامیابی در انجام دستور کار است، یا درصد این که سامان‌های بی آن که دچار نارسایی شود به دستور کار برگزیده با مرزهای گزینش شده در برنامه‌ریزی (مانند مرزهای زمانی و مکانی) و در بستر کارکردی ویژه (مانند دما، لرزش و غیره) کار کند [۲]. تعریف قابلیت اعتماد بر تعریف وقوع خرابی و عیب بنا شده‌است. برای مدل‌سازی قابلیت اعتماد روش‌های مختلفی وجود دارد.

روش‌های مبتنی بر آمار و اطلاعات آماری ناشی از عملکرد و تعیین تعداد خرابی و همچنین بررسی فیزیک خرابی از جمله این موارد هستند. تحقیقات متعددی در زمینه قابلیت اطمینان ریز فناوری‌ها صورت گرفته‌است. تانر و همکاران [۳] تاثیر رطوبت روی سایش میکروساختارها را بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که رطوبت یک عامل قوی در سایش سطوح مالشی در میکروماشین‌های پلی‌سیلیکون است و رطوبت بسیار کم می‌تواند منجر به سایش بدون تغییر قابل توجهی در قابلیت اطمینان شود. هربرت [۴] روی صلاحیت و اطمینان سامانه‌ها در صنعت هوافضا کار کرده است. او توضیح می‌دهد، حسگرها و محرک‌های ممز با جرم و حجم بسیار کم، مصرف انرژی کم و ادغام دقیق با الکترونیک، برای کاهش اندازه و جرم فضاپیما بدون به خطر انداختن عملکرد، بسیار جذاب هستند. مولنی و همکاران [۵] تجزیه و تحلیل تکامل ولتاژهای تحریک در طول اندازه‌گیری تنش طولانی‌مدت در دمای مختلف برای یک سوئیچ ممز معمولی را ارائه کردند. آن‌ها نشان دادند که هنگامی که اثرات شارژ از بین

* نویسنده پاسخگو: a_rahi@sbu.ac.ir

^۱ MEMS; Micro-ElectroMechanical System

در شرایط مختلف کاری مورد بررسی قرار می‌گیرند تا عملکرد هر یک از آن‌ها مورد تحلیل و بررسی قرار گیرد. سپس حسگر برای دو ماده سیلیکون و کاربید سیلیکون شبیه‌سازی شده و مورد مقایسه و بررسی قرار می‌گیرد. دما و ضخامت دیافراگم از پارامترهای اصلی مورد تغییر در این مقایسه هستند. قابلیت اطمینان حسگر با داده‌های تنش بدست آمده از شبیه‌سازی از طریق نمودار توزیع طبیعی بدست می‌آید. تنش‌های استفاده شده از طریق تغییر در تفرانس‌های ساخت به صورت کاملاً تصادفی بدست آمده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که کاربید سیلیکون با تجربه تنش کم‌تر و قابلیت اطمینان بالاتر ماده مناسب‌تری برای ساخت حسگر است.

۲. مواد و روش

حسگر فشار مدل‌سازی شده به همراه یک بخش برش خورده آن، در شکل ۱ ارائه شده است. دیافراگم حسگر فشار دارای ضخامت ۲ میکرومتر می‌باشد. جنس حسگر نیز از سیلیکون با مدول یانگ ۱۵۳ GPa و ضریب پواسون ۰/۲۳ است.

هنگامی که نیرویی به صفحه‌ای که از هر چهار طرف گیردار می‌باشد (دیافراگم حسگر فشار) وارد شود، می‌توان تنش در وسط ضلع b را از روابط زیر محاسبه کرد [۱۳]:

$$\sigma_m = \frac{pa^2}{2t^2 \left[0.623 \left(\frac{a}{b} \right)^6 + 1 \right]}, \quad (1)$$

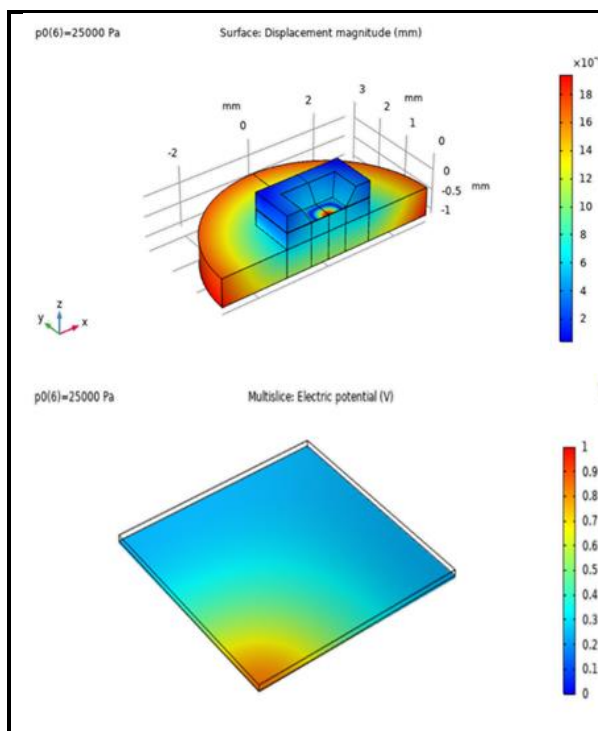
$$z_m = \frac{0.284pa^4}{Et^2 \left[1/0.56 (a/b)^5 + 1 \right]}, \quad (2)$$

که در آن a ، b و t به ترتیب عرض، طول و ضخامت صفحه می‌باشند. همچنین p فشار است. لازم به ذکر است که تنش بیشینه در رابطه فوق برای وسط ضلع کوچک‌تر می‌باشد (البته چون دیافراگم مدل‌شده در این پژوهش مربع شکل است، طول و عرض آن برابر هستند).

می‌رود یا نادیده گرفته می‌شود، پایین آمدن عملکرد به دلیل کاهش ثابت فنر سوئیچ، تحت تأثیر قرار می‌گیرد، که هم‌زمان هم از طریق دما و هم از طریق زمان تحریک، تحت تأثیر قرار می‌گیرد. ماتمت و همکاران [۶] یک مدل قابلیت اطمینان جدید برای ممز خازنی ارائه دادند. این مدل، ترکیبی از تجزیه و تحلیل خرابی و عملکرد دستگاه است. آن‌ها در این مقاله بر روی گامی در یک روش شناختی متمرکز شدند که شامل مدل‌سازی یک فرایند فیزیکی در حال تکامل در زمان و شناسایی به عنوان مسئول خرابی دستگاه است. بوشان [۷] تأکید کرد که باید با تمایز مشخصی بین حالت‌های خرابی و مکانیسم‌های خرابی در ممز، کار ارزیابی قابلیت اعتماد را شروع کرد. تانر و همکاران [۳] اثر رطوبت، ارتعاشات و محیط شوک را در ممز ارزیابی کردند. همچنین، مکانیسم‌های شکست و حالت‌های شکست برای هر یک از شرایط مورد بحث قرار گرفت و داده‌های تحلیلی در آزمایش‌ها استفاده شد. علاوه بر این، والت [۸] پیشرفته‌ترین فرایندهای تجزیه و تحلیل شکست میکروالکترونیکی، ابزار دقیق و اصول را معرفی کرد. شارپ و باگدان [۹] سه دسته کلی قابلیت ارتجاعی از یک نیروی اعمال شده یا بالعکس، رفتار دستگاه غیر الاستیک و مقاومت مواد برای تعیین محدودیت‌های عملکردی را برای تجزیه و تحلیل خواص مکانیکی ممز مشخص کردند.

محمود و همکاران [۱۰] به بررسی طراحی بهینه انتخاب مواد برای حسگر فشار ممز جهت حداکثر کردن بسامد تشدید پرداختند. ادلیه و همکاران [۱۱] از روش انتقال دیفرانسیل بهبود یافته برای تحلیل دینامیکی یک دیافراگم دایره‌ای ویسکوالاستیک حسگر فشار ممز استفاده کردند. آن‌ها در نهایت به این نتیجه رسیدند که روش ارائه شده می‌تواند راه حل خوبی برای مدل‌سازی و پیش بینی مشخصات فنی حسگر فشار باشد. کانکال و جیندال [۱۲] یک حسگر فشار پیروز مقاومتی با دیافراگم مستطیلی شکل برای کاربردهای مقاوم در دما و فشار بالا را ارائه کردند. آن‌ها در مطالعه خود از روش مدل‌سازی و شبیه‌سازی برای تحلیل ویژگی‌های حسگر فشار پیروز مقاومتی با دیافراگم مستطیلی استفاده کردند.

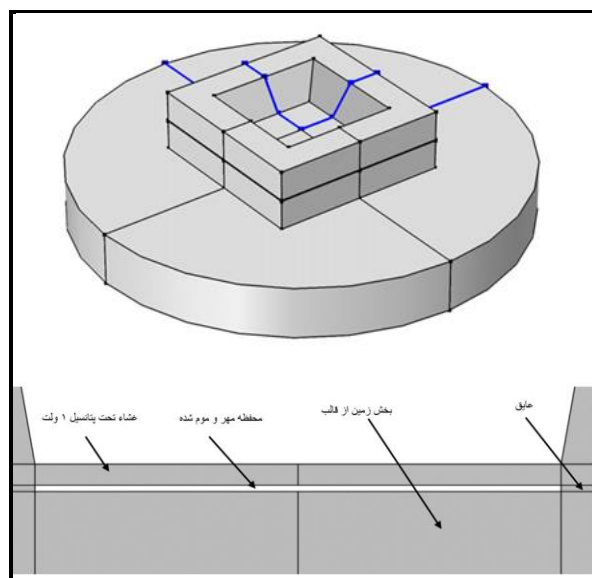
در این پژوهش تأثیر عوامل محیطی مانند دما، مواد، ساخت حسگر، تفرانس‌های ساخت و هندسه قطعه روی قابلیت اطمینان مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا حسگر فشار با ابعاد و اندازه‌های مشخص شبیه‌سازی می‌شود و سپس این حسگرها



شکل ۲ انحراف ربع برش خورده دیافراگم و جابجایی حسگر فشار بر اثر افزایش دما.

در ادامه حسگر برای دو ماده سیلیکون و کاربید سیلیکون شبیه‌سازی و مقایسه شده‌است. دیافراگم حسگر فشار برای ضخامت‌های ۱، ۱/۶ و ۲/۲ میکرومتر برای هر دو ماده شبیه‌سازی شده‌است. دیافراگم پس از آنکه تحت فشار قرار گرفت، مشاهده شد که سیلیکون نسبت به کاربید سیلیکون، جابجایی بزرگتری را از خود نشان می‌دهد (شکل ۳). همچنین با افزایش دما کاربید سیلیکون کاهش ظرفیت خازنی کم‌تری را نسبت به سیلیکون تجربه می‌کند که به مراتب عملکرد بهتری می‌باشد.

در ادامه این دو ماده در دماهای ۳۰۰ تا ۱۰۰۰ کلوین شبیه‌سازی می‌شوند تا حداکثر تنش موجود در حسگر فشار اندازه‌گیری شود. بر اساس شکل ۴، نتایج حاکی از آن است که اولاً با افزایش فشار، افزایش تنش حداکثر در حسگر دیده می‌شود. ثانیاً کاربید سیلیکون تنش حداکثری به مراتب کم‌تری نسبت به سیلیکون از خود نشان می‌دهد.



شکل ۱ حسگر فشار مدلسازی شده به همراه یک بخش برش خورده.

همچنین مشخصات مربوط به مواد در جدول ۱ ارایه شده‌است.

جدول ۱ مشخصات مواد استفاده شده در شبیه‌سازی حسگر.

مشخصات مواد	سیلیکون	کاربید سیلیکون
مدول یانگ (GPa)	۱۶۹	۴۷
ضریب پواسون	۰/۳	۰/۲۲
چگالی ($\text{kg}/\mu\text{m}^3$)	2.5×10^{-15}	3.2×10^{-15}
رسانایی گرمایی (pW/umK)	۱,۴۸e۸	۵e۸
گرمای ویژه (pJ/Kgk)	۷,۱۲e۱۴	۱,۳۴e۱۵
دمای ذوب (C)	۲۷۰۲	۱۴۱۴

۳. نتایج

در این پژوهش برای شبیه‌سازی از نرم‌افزارهای المان محدود^۱ کامسول^۲ و انسیس^۳ استفاده شده‌است. عنصر^۴های مش تا جایی که پاسخ‌ها همگرا شوند کوچک در نظر گرفته شده‌است. طبق شبیه‌سازی‌های انجام شده می‌توان در شکل ۲ انحراف ربع برش خورده دیافراگم و جابجایی حسگر فشار بر اثر افزایش دما را مشاهده کرد.

³ Ansys

⁴ Element

¹ Finite Element

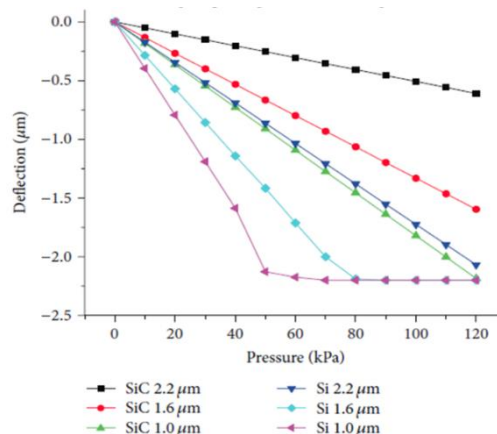
² COMSOL

همانطور که گفته شد حسگرهای فشار خازنی کاربرد فراوانی در صنعت دارند و قابلیت اطمینان این نوع حسگرها از اهمیت بالایی برخوردار است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی نشان می‌دهد که دیافراگم حسگر فشار از جنس کاربید سیلیکون با جابجایی و تنش کم‌تر نسبت به دیافراگم سیلیکونی عملکرد بهتری را از خود نشان می‌دهد. همچنین کاربید سیلیکون هنگامی که تیرانس‌های ساخت در قطعه وجود دارد با افزایش تنش ۷ درصدی نسبت به سیلیکون با افزایش ۱۳ درصدی عملکرد به مراتب بهتری دارد. طبق شبیه‌سازی‌ها و نتایج، با استفاده از نمودار توزیع طبیعی قابلیت اعتماد این دو ماده محاسبه و استخراج شد. برای این منظور، ابتدا نرخ خرابی برای سیلیکون و کاربید سیلیکون در حسگر فشار خازنی هنگامی که تحت تاثیر فشار و دمای بالا هستند محاسبه شده‌است. با جایگذاری تنش حد شکست و تنش حداکثر، انحراف از معیار تنش‌ها محاسبه می‌شود. حال برای بدست آوردن مقدار نرخ خرابی، باید نتیجه حاصل را در جداول مربوط به توزیع طبیعی جایگزین و مقدار نرخ خرابی را محاسبه کرد. لازم به ذکر است که تعیین قابلیت اعتماد وابسته به تعیین نرخ خرابی می‌باشد. با استفاده از نرخ خرابی برای حسگر، می‌توان قابلیت اعتماد را محاسبه کرد. قابلیت اعتماد همواره بین صفر و یک است. برای مثال قابلیت اعتماد ۰/۹ یعنی شانس کارکرد خوب و درست و خراب نشدن قطعه ۹۰ درصد است.

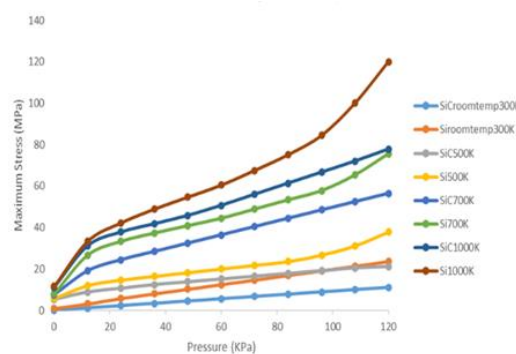
قابل ذکر است که نمونه‌ها با تیرانس‌های ساخت مختلف و به صورت تصادفی شبیه‌سازی شدند تا نتایج قابل اتکا و صحیح باشند. طبق محاسبات انجام شده، نرخ خرابی‌های بدست آمده برای سیلیکون ۰/۱۹ و برای کاربید سیلیکون (در همان شرایط کاری) برابر با ۰/۰۸ می‌باشد. این بدان معناست که برای مثال از هر ۱۰۰۰ قطعه حسگر ساخته شده با مواد سیلیکون ۱۹۰ قطعه و برای مواد کاربید سیلیکون ۸۰ قطعه احتمال خرابی دارد. این نشان از برتری کاربید سیلیکون نسبت به سیلیکون دارد. قابلیت اطمینان محاسبه شده در جدول ۲ قابل مشاهده است.

جدول ۲ نرخ خرابی و قابلیت اعتماد سیلیکون و کاربید سیلیکون.

ماده	نرخ خرابی	قابلیت اعتماد	تعداد قطعه شکسته از ۱۰۰۰ عدد
سیلیکون	۰/۱۹	۰/۸۱	۱۹۰
کاربید سیلیکون	۰/۰۸	۰/۹۲	۸۰

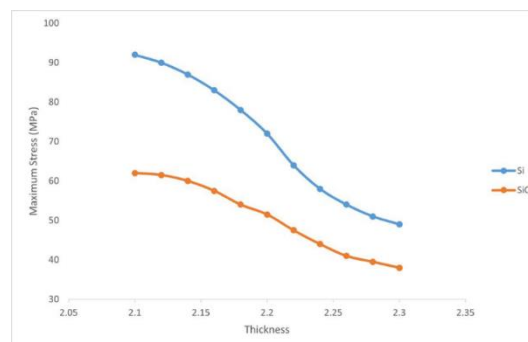


شکل ۳ جابجایی دیافراگم بر حسب فشار برای دو ماده کاربید سیلیکون و سیلیکون.



شکل ۴ مقدار بیشینه تنش در برابر فشار در دماهای مختلف برای دیافراگم با ضخامت ۲/۲ میکرومتر.

در ادامه تاثیر تیرانس‌های ساخت روی این دو ماده مورد بررسی قرار می‌گیرد. در شکل ۵ مشاهده می‌شود که کاربید سیلیکون نسبت به سیلیکون واکنش کم‌تری به تیرانس‌های ساخت نشان می‌دهد. هر چند تیرانس‌های منفی ساخت باعث افزایش تنش حداکثری سامانه می‌شوند، اما این افزایش در کاربید سیلیکون کم‌تر است.



شکل ۵ مقایسه تاثیر تیرانس‌های ساخت روی تنش بیشینه سیلیکون و کاربید سیلیکون.

۴. صحنه‌گذاری

کاری یکسان مورد بررسی قرار گرفت. همچنین در تحقیق حاضر اثرات دما و فشار و تیرانس‌های ساخت روی تنش حداکثر بررسی شد. نتایج نشان داد که کاربید سیلیکون تغییرات کم‌تری به دما، فشار و تیرانس‌های ساخت از خود نشان می‌دهد. همچنین مشاهده شد که کاربید سیلیکون با قابلیت اطمینان ۹۲ درصد، نسبت به سیلیکون با قابلیت اطمینان ۸۱ درصد، ماده مناسب‌تری برای ساخت حسگر می‌باشد.

نتایج حاصل از این پژوهش نشان می‌دهد که ماده کاربید سیلیکون نسبت به تغییر پارامترهای دما و فشار و تیرانس‌های ساخت، تغییرات کم‌تری از خود نشان می‌دهد. همچنین مشاهده شد که کاربید سیلیکون با تجربه تنش کم‌تر و قابلیت اطمینان بالاتر ماده مناسب‌تری برای ساخت حسگرها است.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از سردبیر و داوران محترم مجله انجمن مهندسی صوتیات ایران، برای نظرات ارزشمند ارایه شده، تقدیر و سپاسگزاری به عمل می‌نمایند.

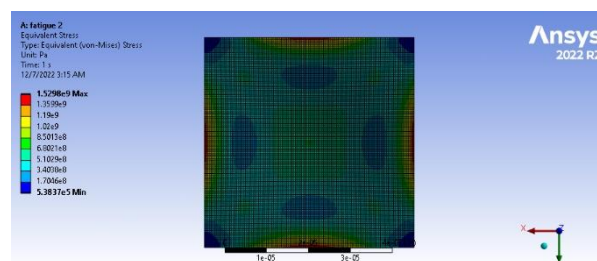
تضاد منافع

این مطالعه تضاد منافع ندارد.

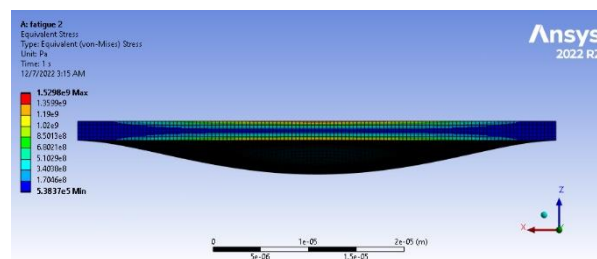
فهرست منابع

- [1] B. Al-Najjar, "The lack of maintenance and not maintenance which costs: A model to describe and quantify the impact of vibration-based maintenance on company's business," International Journal of Production Economics, vol. 107, no. 1, pp. 260-273, 2007.
- [2] RCM II, "Reliability Centered Maintenance," Second edition, the role of Actuarial analysis in Reliability, pp. 250-260, 2008.
- [3] D. Tanner, J. Walraven, L. Irwin, M. Dugger, N. Smith, W. Eaton, W. Miller, S. Miller, "The effect of humidity on the reliability of a surface micromachined microengine," IEEE International Reliability Physics Symposium Proceedings, pp. 189-197, 1999.
- [4] H. Shea, "Reliability of MEMS for space applications," MEMS-MOEMS Micro and Nanofabrication, vol. 6111, pp. 84-93, 2006.

در شکل ۶، می‌توان تنش‌های ایجاد شده در دیافراگم را مشاهده کرد. همانطور که مشاهده می‌شود حداکثر تنش در کناره‌های صفحه به مقدار ۱/۵۲۹۸ گیگاپاسکال مشاهده می‌شود. این مقدار ۳/۱ درصد بیش‌تر از مقداری است که از روابط تحلیلی (۱) بدست می‌آید. این خطا به علت اختلاف رابطه با نرم‌افزار و همچنین محل بیشینه تنش می‌باشد. در ادامه با دور شدن از کناره‌های صفحه و حرکت به سمت میانه صفحه، تنش‌ها متفاوت خواهد بود و همچنین کاهش تنش دیده می‌شود. تغییرشکل دیافراگم نیز در شکل ۷ مشاهده می‌شود. همچنین خلاصه صحنه‌گذاری نتایج، در جدول ۳ ارایه شده است.



شکل ۶ توزیع تنش در دیافراگم حسگر فشار.



شکل ۷ تغییرشکل دیافراگم سنسور فشار پس از اعمال فشار.

جدول ۳ صحنه‌گذاری نتایج حاصل از شبیه‌سازی.

پارامتر	تحلیلی	نرم‌افزار	خطا (%)
تنش حداکثر (GPa)	۱,۵۷۹۸	۱,۵۲۹۸	۳,۱
جابجایی (μm)	۶۱,۴	۵۹,۷۳	۲,۸

۵. نتیجه‌گیری

حسگر فشار خازنی می‌مزد در شرایط کاری مختلف مورد شبیه‌سازی و بررسی قرار گرفت. حسگر برای دو ماده کاربید سیلیکون و سیلیکون شبیه‌سازی شد و در شرایط محیطی و

- [5] V. Mulloni, L. Lorenzelli, B. Margesin, M. Barbato, G. Meneghesso, “Temperature as an accelerating factor for lifetime estimation of RF-MEMS switches,” *Microelectronic Engineering*, vol. 160, pp. 63-67, 2016.
- [6] M. Matmat, F. Coccetti, A. Marty, R. Plana, G. Escriba, “Capacitive RF MEMS analytical predictive reliability and lifetime characterization,” vol. 49, no. 9, pp. 1304-1308, 2009.
- [7] B. Bhushan, “Springer Handbook of Nanotechnology,” New York, USA, 2007.
- [8] D. Vallett, “Failure analysis requirements for Nano electronics,” *IEEE Transactions on Nanotechnology*, vol. 1, no. 3, pp. 117–121, 2002.
- [9] W. Sharpe, J. Bagdahn, “Fatigue of materials used in microelectromechanical systems (MEMS),” 8th International Congress on Fatigue, Stockholm, Sweden, 2002.
- [10] Z. Mehmood, I. Haneef, F. Udrea, “Material selection for optimum design of MEMS pressure sensors,” *Microsyst Technol*, vol. 26, no. 1, pp. 2751–2766, 2020.
- [11] D. Adeleye, M. Yusuf, O. Balogun, “Dynamic analysis of viscoelastic circular diaphragm of a MEMS capacitive pressure sensor using modified differential transformation method,” *Karbala International Journal of Modern Science*, vol. 6, no. 3, pp. 293-307, 2020.
- [12] D. Kanekal, S. Jindal, “Investigation of MEMS piezoresistive pressure sensor with a freely supported rectangular silicon carbide diaphragm as a primary sensing element for altitudinal applications,” *Silicon*, vol. 15, no. 4, pp. 1–13, 2022.
- [13] E. Edge, “Uniform load rectangular plate clamped (empirical) equations and calculator,” from https://www.engineersedge.com/material_sci ence/uniform_load_rectangular_plate__13644.htm