Journal of Acoustical Engineering Society of Iran, Vol. 11, No. 1, 2023

(Research Article)
DOA estimation using time-frequency distributions

H. Solati, M. Karimi*
School of Electrical and Computer Engineering, Shiraz University

Received: 2022/03/29, Accepted: 2023/04/23

Abstract

This paper addresses the problem of direction of arrival (DOA) estimation for nonstationary signals using time-frequency distributions (TFDs). The averaging method is used for selecting the time-frequency points. For this purpose, a strength indicator is used to remove the points with more noise. The method of obtaining the strength indicator is described and numerical simulations are used to show its effect. In addition, the DOA estimation method using time-frequency distributions when the number of sources is more than sensors is described and simulated. In addition to the narrowband model, the broadband model is also used for the output signal of the sensor array, which increases the accuracy of the performance evaluation of DOA estimation methods. The effect of time-frequency kernels, number of snapshots, number of sensors, signal-to-noise ratio (SNR), bandwidth and signal type are investigated in simulations. The effect of window length and window type in the Wigner-Ville kernel is also examined. The computational complexities of both conventional and time-frequency DOA estimation methods are also compared. The results show that as the strength indicator increases, the estimation error decreases, but with a large increase in the strength indicator, the number of averaging points also decreases, which increases the error. Simulation results show that for low SNRs, the TFD based DOA estimation methods perform better, while for high SNR values, both conventional and TFD based approaches have similar performances.

Keywords: Array processing, Time-Frequency Distributions (TFD), DOA estimation, Nonstationary signals.

pp. 33-47 (In Persian)

* Corresponding author E-mail: karimi@shirazu.ac.ir

مقاله پژوهشی

مجله انجمن مهندسی صوتیّات ایران
سال ۱۴۰۲، دوره: ۱۱، شماره: ۱، صفحات: ۳۳-۴۷

تخمین جهت‌یابی با استفاده از توزیع‌های زمان- بسامد

حمید صولتی، محمود کریمی*
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه شیراز
دریافت: ۱۴۰۱/۰۱/۰۹، پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۰۳

چکیده

در این مقاله مسئله جهت‌یابی آرایه‌ای با استفاده از توزیع‌های زمان- بسامد برای علامت‌های ناایستان مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. برای انتخاب نقاط زمان- بسامد از روش میانگین‌گیری استفاده می‌شود، و بدین منظور از یک آستانه یا شاخص قدرت جهت حذف نقاط دارای نوفه بیش‌تر استفاده می‌شود. نحوه به‌دست آوردن آستانه و اثر آن در شبیه‌سازی‌ها نمایش و شرح داده می‌شود. هم‌چنین نحوه جهت‌یابی با استفاده از توزیع‌های زمان- بسامد در هنگامی که تعداد منابع بیش‌تر از حسگرها است شرح داده شده و شبیه‌سازی شده‌اند. علاوه بر الگوی باریک‌باند، از الگوی پهن‌باند نیز برای علامت خروجی آرایه حسگرها استفاده شده است که دقت ارزیابی عملکرد روش‌های جهت‌یابی را افزایش می‌دهد. در شبیه‌سازی‌ها اثر انواع کرنل‌های زمان- بسامد و هم‌چنین اثر طول پنجره و نوع پنجره با کرنل شبه ویگنر- ویل روی عملکرد روش‌های جهت‌یابی بررسی می‌شود. علاوه بر این، اثر پهنای باند، تعداد حسگرها و نوع علامت روی عملکرد روش‌های جهت‌یابی بررسی می‌شود. هم‌چنین پیچیدگی محاسباتی روش‌های مرسوم و روش‌های مبتنی بر توزیع‌های زمان- بسامد نیز مقایسه می‌شوند. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش آستانه، خطای تخمین کاهش می‌یابد ولی افزایش زیاد آستانه تعداد نقاط میانگین‌گیری را نیز کاهش می‌دهد که باعث افزایش خطا می‌گردد. هم‌چنین در حالتی‌که علامت‌ها ناایستان باشند، در نسبت‌های علامت به نوفه پایین روش‌های مبتنی بر توزیع زمان- بسامد، عملکرد جهت‌یابی را نسبت به روش‌های مرسوم بهبود می‌بخشند.

کلیدواژه‌ها: پردازش آرایه‌ای، توزیع‌های زمان- بسامد، تخمین جهت‌یابی، علامت‌های ناایستان.

۱. مقدمه

در طیف گسترده‌ای از کاربردهای مهندسی، مجموعه یا آرایه‌ای از حسگرهای اندازه‌گیری برای دریافت علامت منابع از محیط و اعمال الگوریتم‌های پردازش آرایه‌ای مانند الگوریتم‌های جهت‌یابی منابع به‌کار می‌روند. به‌عنوان نمونه می‌توان به آرایه‌های میکروفونی و سامانه‌های سونار اشاره کرد که در آن‌ها از علامت‌های صوتی منابع استفاده می‌شود. علامت‌های صوتی این ویژگی مهم را دارند که نسبت به علامت‌های رادیویی از بسامد بسیار پایینی برخوردارند و بنابراین در هنگام نمونه‌برداری از این علامت‌ها، از بسامد نمونه‌برداری اندک استفاده می‌شود و تعداد نمونه‌های علامت در ثانیه بسیار کم‌تر خواهد بود. این ویژگی باعث کاربرد گسترده الگوریتم‌های پردازش آرایه‌ای مانند الگوریتم‌های جهت‌یابی در حوزه‌هایی مانند سونار و آرایه‌های میکروفونی شده است، چون تعداد کم نمونه‌ها باعث حجم کم محاسبات می‌شود و به‌کارگیری الگوریتم‌های پردازش آرایه‌ای که محاسبات نسبتاً سنگینی دارند را بسیار آسان‌تر می‌کند. هم‌چنین به این نکته هم باید اشاره کرد که در بسیاری از کاربردهای دنیای واقعی، ویژگی‌های علامت‌های اندازه‌گیری‌شده توسط حسگرها با زمان تغییر می‌کند، یعنی این علامت‌ها ناایستان هستند.

در این مقاله هر دو ویژگی متغیر با زمان بودن علامت‌های اندازه‌گیری‌شده و اطلاعات فضایی ارائه‌شده توسط مجموعه‌ای از حسگرهای اندازه‌گیری مورد توجه و استفاده قرار گرفته‌اند. یک زمینه خاص پردازش علامت، پردازش علامت‌های ناایستان است، یعنی علامت‌های با ویژگی‌های طیفی متغیر با زمان که برای تحلیل و پردازش آن‌ها از تجزیه و تحلیل توأم زمان- بسامد استفاده می‌شود [۱]. درحالی‌که مفاهیم و ابزارهای تجزیه و تحلیل زمان- بسامد

* نویسنده پاسخگو: karimi@shirazu.ac.ir

بیش از هفتاد سال است که بیان شده‌اند، استفاده از تجزیه و تحلیل زمان- بسامد برای مسائل پردازش آرایه‌ای حسگرها سابقه‌ای در حدود دو دهه دارد. به‌طور خاص، مفهوم توزیع زمان- بسامد فضایی ابتدا توسط بلوچرانی و امین معرفی شد که به‌عنوان ابزاری قدرتمند برای بهره‌برداری از ناایستانی، برای حل مسائل مربوط به چند حسگر به کار رفت. در واقع همان‌گونه که دیده خواهد شد، در حالتی‌که علامت‌ها ناایستان باشند، استفاده از توزیع زمان- بسامد فضایی عملکرد روش‌های جهت‌یابی را بهبود می‌بخشد [۲].

بلوچرانی و امین در سال ۱۹۹۹ مفهوم توزیع زمان- بسامد فضایی را برای تخمین جهت به کار بردند و با استفاده از نمایش زمان- بسامد علامت، یک روش جدید برای تخمین زیرفضای نوفه و زیرفضای علامت و تخمین جهت بر مبنای آن معرفی کردند که میوزیک زمان- بسامد نامیده شد [۲].

گرشمان و همکاران در سال ۲۰۰۰ روی‌کرد توزیع زمان- بسامد فضایی باریک‌باند را به حالت پهن‌باند تعمیم دادند و روی‌کرد مرسوم زیرفضای علامت همدوس[1] را برای یافتن جهت‌ها با توزیع زمان- بسامد فضایی پهن‌باند به کار بردند. این فنّ از یک مجموعه از پیش تعیین‌شده از نقاط زمان- بسامد استفاده می‌کند. آن‌ها نشان دادند که در این حالت، کرنل شبه ویگنر- ویل باید یک پنجره به حد کافی کوتاه را برای حفظ ساختار باریک‌باند ماتریس هدایت آرایه اعمال کند [۳].

ژانگ و همکاران در سال ۲۰۰۰ از روش بیشینه درست‌نمایی زمان- بسامد[2] برای تخمین جهت استفاده کردند، آن‌ها از این روش در محیط‌های هم‌فاز بدون انجام هر نوع پیش‌پردازش استفاده کردند [۴].

ژانگ و همکاران در سال ۲۰۰۱ یک ساختار ویژه از ماتریس توزیع زمان- بسامد فضایی را مورد بررسی قرار دادند و یک تجزیه و تحلیل آماری از زیرفضای علامت و نوفه ارائه دادند [۵].

منصور و همکاران در سال ۲۰۰۵ در مورد صوتی اقیانوس‌ها از توزیع زمان- بسامد استفاده کردند. آن‌ها یک روش برای توموگرافی غیرفعال[3] صوتی بر مبنای توزیع زمان- بسامد طراحی کردند که با علامت‌های پهن‌باند گذرا سازگار است [۶].

ژانگ و همکاران در سال ۲۰۰۶ بُعد قطبی‌سنجی[4] را برای توزیع‌های زمان- بسامد[5] فضایی معرفی کردند که منجر به توزیع زمان- بسامد قطبی‌سنجی فضایی (اِس‌پی‌تی‌اِف‌دی)[6] به‌عنوان یک بستر برای پردازش ناایستان علامت‌های قطبی شده است. در چهارچوب توزیع زمان- بسامد، قطبی‌سنجی فضایی علامت‌های قطبی‌شده، به دو مؤلفه متعامد تجزیه می‌شوند. آن‌ها از این توزیع برای بهبود تخمین زوایای ورود استفاده کردند [۷].

شریف و همکاران در سال ۲۰۱۱ مشکل تخمین ماتریس توزیع زمان- بسامد را در حضور نوفه ضربه‌ای[7] در نظر گرفتند و فنّ جدید را برای تخمین ماتریس توزیع زمان- بسامد فضایی پیشنهاد دادند [۸].

خدجا و همکاران در سال ۲۰۱۲ توزیع‌های زمان- بسامد فضایی را در جهت‌یابی با استفاده از الگوریتم میوزیک به کار بردند و تجزیه و تحلیلی از عملکرد الگوریتم میوزیک در حضور نوفه جمع‌شونده و خطای کالیبراسیون در یک محیط ناایستان ارائه دادند [۹].

صبرا و اندرسون در سال ۲۰۱۴ یک شکل‌بندی از ماتریس توزیع زمان- بسامد فضایی عمومی از یک داده تک برداشت[8] به‌وسیله محاسبه کلاس کوهن[9] توزیع زمان- بسامد بین همه جفت‌داده‌های حسگرها پیشنهاد دادند. این روی‌کرد به‌خصوص برای به‌دست آوردن پژواک‌های ناایستان از بازآوایش هدف‌های زیر آب که در حوزه زمان- بسامد هستند مناسب است [۱۰-۱۱].

هایجین ژانگ و همکاران در سال ۲۰۱۶ یک توسعه جدید برای الگوریتم تخمین جهت را بررسی کردند. آن‌ها یک الگوریتم میوزیک مبتنی بر تبدیل فوریه کوتاه‌مدت فضایی[10] ابداع کردند که به‌طور مؤثر پیچیدگی پیاده‌سازی را کاهش می‌داد. آن‌ها هم‌چنین نشان دادند علاوه بر

[1] Coherent signal-subspace
[2] Time-frequency maximum likelihood (t-f ML)
[3] Passive acoustic tomography
[4] Polarimetric dimension
[5] Time-frequency distributions
[6] SPTFDs; Spatial Polarimetric Time-Frequency Distributions
[7] Impulsive noise
[8] Single-snapshot data
[9] Cohen's class
[10] STFT- MUSIC

پیچیدگی کم، مزیت اصلی این الگوریتم زمانی است که محتوای طیفی منابع در حوزه زمان- بسامد بسیار هم‌پوشانی دارند [۱۲].

جین چنگ لین و همکاران در سال ۲۰۱۶ الگوریتم جدید اسپریت برای تخمین جهت را ارائه دادند. آن‌ها علامت دریافت‌شده را در شکل الگو داده زمان- بسامد با ویژگی چندمتغیری بازسازی کردند و سپس یک تخمین زمان- بسامد چندمتغیره اسپریت[1] را برای تخمین جهت پیشنهاد دادند [۱۳].

جیشی و همکاران در سال ۲۰۱۷ یک روش مبتنی بر قطری‌سازی توأم[2] مبتنی بر چرخش ژاکوبی[3] که می‌تواند به‌طور مؤثر ترکیب همه نقاط توزیع زمان- بسامد فضایی مربوطه را برای رسیدن به تخمین جهت با قدرت تفکیک بالا و تضعیف گلبرگ‌های فرعی در طیف فضایی انجام دهد، پیشنهاد دادند [۱۴].

کایبوکویی و همکاران در سال ۲۰۱۷ یک الگوریتم اسپریت[4] برای تخمین جهت علامت‌های با مدولاسیون خطی مبتنی بر تبدیل کوتاه‌مدت فوریه بیان کردند. این الگوریتم از تبدیل کوتاه‌مدت فوریه عناصر خروجی برای به‌دست آوردن ماتریس توزیع زمان- بسامد استفاده می‌کند که می‌تواند تداخل جمله‌های متقابل را در مقایسه با توزیع ویگنر- ویل کاهش دهد. این الگوریتم هم‌چنین می‌تواند برای تخمین جهت چندین علامت با مدولاسیون بسامد خطی[5] استفاده شود [۱۵].

سمیر اوئلها و همکاران در سال ۲۰۱۷ از توزیع‌های زمان- بسامد درجه دوم با قدرت تفکیک بالا برای کاهش جمله‌های متقابل استفاده کردند که یک قدرت تفکیک خوب برای ساخت توزیع‌های زمان- بسامد فضایی را ایجاد می‌کند. آن‌ها از یک الگوریتم مبتنی بر پردازش تصویر استفاده کردند. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که این روش متوسط خطای مرتبه دوم طبیعی را برای منابع کور، ۱۰ دسی‌بل بهبود می‌دهد [۱۶].

نبیل علی‌خان و همکاران در سال ۲۰۱۸ یک الگوریتم جدید برای تخمین جهت ارائه دادند که از توزیع زمان- بسامد جهتی وفقی[6] برای تحلیل اجزای علامت‌های نزدیک به هم استفاده می‌کند. توزیع زمان- بسامد جهتی وفقی، جهت کرنل را در هر نقطه در دامنه زمان- بسامد بهینه می‌کند تا یک نمایش آشکار زمان- بسامد به‌دست آید و سپس برای تخمین زوایای ورود مورد استفاده قرار گیرد. نتایج تجربی نشان می‌دهند که الگوریتم پیشنهادی جهت‌یابی براساس توزیع زمان- بسامد جهتی وفقی از سایر الگوریتم‌های جهت‌یابی مبتنی بر کرنل وفقی و ثابت بهتر است [۱۷].

مناسب است که در این‌جا به برخی کارهای نو که در این مقاله صورت گرفته اشاره شود. در این مقاله علاوه بر الگوی داده باریک‌باند برای خروجی آرایه حسگرها که در مقالات بالا استفاده شده است، از الگوی داده پهن‌باند که با نمونه‌برداری به‌دست می‌آید، نیز برای شبیه‌سازی خروجی آرایه استفاده می‌شود و مقایسه میان عملکرد روش‌های جهت‌یابی زمان- بسامد با این دو الگو صورت می‌گیرد. هم‌چنین علاوه بر علامت با مدولاسیون بسامد خطی از علامت با مدولاسیون بسامد غیرخطی نیز استفاده می‌شود. گرشمان [۳] از یک کرنل شبه ویگنر- ویل با پنجره مستطیلی خیلی کوچک استفاده کرده است و به بررسی نوع پنجره و طول پنجره نپرداخته است که در این مقاله این دو عامل نیز بررسی می‌گردند. علاوه بر این گرشمان [۳] و بلوچرانی [۲] و جیشی [۱۴] برای انتخاب نقاط زمان- بسامد از روش قطری‌سازی توام استفاده کرده‌اند ولی در این مقاله از روش میانگین‌گیری استفاده می‌شود و برای حذف اثر نوفه هم از یک آستانه یا شاخص قدرت استفاده می‌شود. برای کاهش محاسبات و خطا هم تنها از جمله‌های خودی ماتریس توزیع زمان- بسامد استفاده شده است. هم‌چنین در مقالاتی که از روش میانگین‌گیری استفاده می‌کنند، اثر شاخص قدرت در جهت‌یابی بررسی نشده است که در این مقاله به بررسی اثر شاخص قدرت در جهت‌یابی و انتخاب نقاط زمان- بسامد و توجیه رفتار آن پرداخته می‌شود. در مقالات بالا جهت‌یابی زمان- بسامد برای حالتی که تعداد منابع

[1] T-F MI-ESPRIT
[2] Joint diagonalization
[3] Jacobi rotation
[4] STFT-MI-ESPRIT algorithm
[5] LFM
[6] ADTFD; Adaptive Directional Time-frequency Distribution

بیش‌تر از حسگرها باشد صورت نگرفته، که در این مقاله به آن پرداخته می‌شود و هم‌چنین اثر پهنای باند در جهت‌یابی نیز بررسی می‌گردد.

ساختار این مقاله به شرح زیر است: الگوی علامت و تعریف توزیع زمان- بسامد فضایی که در بخش دوم بیان می‌شود. الگوریتم‌های میوزیک زمان- بسامد و اسپریت زمان- بسامد در بخش سوم و نتایج شبیه‌سازی‌ها در بخش چهارم آورده شده‌اند. در بخش پنجم پیچیدگی محاسباتی روش‌های جهت‌یابی مرسوم و روش‌های مبتنی بر توزیع‌های زمان- بسامد بررسی شده‌اند. جمع‌بندی نیز در بخش پایانی آورده شده است.

۲. فرمول‌بندی مسئله

۲-۱. الگوی باریک‌باند علامت آرایه

در صورتی‌که حسگرهای آرایه به‌صورت یک سامانه خطی عمل کنند، می‌توان بردار خروجی آرایه را در زمان t در حضور نوفه و علامت‌های باریک‌باند، به‌صورت مجموع پاسخ‌های آرایه به تک‌تک منابع بیان کرد:

$$X(t) = A(\Theta)s(t) + n(t) \qquad (۱)$$

که در آن بردار علامت منابع و بردار زاویه‌ی منابع و ماتریس هدایت به ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند و به ترتیب دارای ابعاد $n\times۱$، $n\times۱$ و $m\times n$ هستند:

$$S(t) = [s_۱(t).s_۲(t).---.s_n(t)]$$

$$\Theta = [\theta_۱.\theta_۲.---.\theta_n]^T$$

$$A(\Theta) = [a(\theta_۱).a(\theta_۲).---.a(\theta_n)]^T$$

بردار n(t) هم نوفه‌ای سفید و مستقل از علامت‌های منابع است که به خروجی‌های آرایه افزوده می‌شود. n برابر با تعداد علامت‌های منبع و m برابر با تعداد حسگرها است.

به‌طورکلی، علامت‌های منبع به‌صورت زیر نشان داده می‌شوند:

$$s(t) = A\exp(j\vartheta(t))$$

در این صورت، بسامد لحظه‌ای به رادیان توسط رابطه زیر نمایش داده می‌شود:

$$\omega_i(t) = \frac{d}{dt}\vartheta(t)$$

حال اگر بسامد علامت نسبت به زمان خطی باشد:

$$\vartheta(t) = ۲\pi\alpha t^۲ + ۲\Pi f_. t + \varphi$$

در این صورت بسامد لحظه‌ای بر حسب رادیان و هرتز، به‌ترتیب به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\omega_i(t) = \frac{d}{dt}\vartheta(t) = ۴\pi\alpha t + ۲\pi f_.$$

$$f_۱(t) = f_. + ۲\alpha t$$

که در آن $f_.$ بسامد شروع است و ۲α آهنگ افزایش بسامد در طول مدت علامت یعنی T است. باید توجه داشت که بسامد ثابت نیست و به‌صورت خطی با زمان تغییر می‌کند.

$$k = ۲\alpha = \frac{f_۱ - f_.}{T^۲}$$

یعنی بسامد علامت از $f_.$ تا $f_۱$ تغییر می‌کند و علامت توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$s(t) = A\exp\left(j۲\pi\left(f_.t + \tfrac{۱}{۲}kt^۲\right)\right)$$

$$= A\exp\left(j۲\pi\left(f_.t + \alpha t^۲\right)\right)$$

که در آن فاز اولیه صفر در نظر گرفته شده است.

هدف از جهت‌یابی، تخمین بردار Θ است که با استفاده از مشاهدات ($\{x(n)\}_{n=.}^{N-۱}$) که نمونه‌های فرآیند تصادفی x(t) هستند، صورت می‌گیرد.

۲-۲. الگوی پهن‌باند علامت آرایه

در بسیاری از کاربردها علامت‌های دریافتی توسط حسگرها، علامتی پهن‌باند هستند. در این صورت نمی‌توان از الگوی (۱) که مربوط به علامت‌های باریک‌باند است بهره برد. در واقع در این حالت باید از الگوی علامت پهن‌باند استفاده شود که در این زیربخش به آن پرداخته می‌شود. البته این الگوی پهن‌باند را برای علامت‌های باریک‌باند نیز می‌توان استفاده کرد، چون این الگو منطبق بر واقعیت است و نشان‌دهنده عملکرد واقعی حسگرهای آرایه است. البته باید توجه داشت که در این الگو نیز در صورت گردکردن تاخیرها به مضرب صحیحی از دوره تناوب نمونه‌برداری مقداری خطا وجود دارد. بنابراین در هنگام استفاده از این الگو برای شبیه‌سازی علامت‌های خروجی یک آرایه، بسامد نمونه‌برداری باید به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود تا خطای گردکردن تاخیرها به مضرب صحیحی از دوره تناوب نمونه‌برداری باعث ایجاد خطای زیاد در الگو نشود.

فرض کنید $\{s_i\}_{i=۱}^{n}$ علامت‌های دریافتی از منبع باشند که توسط یک آرایه خطی یکنواخت از جهت‌های متمایز

$\{\theta_i\}_{i=1}^{n}$ دریافت می‌شوند. هم‌چنین فرض کنید که تعداد منابع معلوم است یا می‌توان آن را تخمین زد. نوفه هم مستقل از علامت‌های منبع و سفید در نظر گرفته می‌شود. در این صورت علامتی که هر حسگر دریافت می‌کند، ترکیبی از علامت‌های تاخیر یافته منابع و نوفه خواهد بود و خروجی حسگر j-اُم در زمان t را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^{m} s_i\left(t-\gamma_{ji}\right) + n_j(t) \qquad (۲)$$

که در آن y_{ij} تاخیر زمانی علامت منبع i-اُم نسبت به حسگر مرجع، در محل حسگر j-اُم است. $n_j(t)$ هم نوفه جمع‌شونده در حسگر j-اُم است. برای آرایه یکنواخت خطی، $\gamma_{ji} = d \times \sin(\theta_i)/c$ که d برابر با فاصله حسگرهای مجاور از یکدیگر و c نشان‌دهنده سرعت انتشار علامت‌ها در محیط است.

۲-۳. توزیع زمان- بسامد و توزیع زمان- بسامد فضایی

توزیع زمان- بسامد برای یک علامت پیوسته x(t) به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۸]:

$$D_{xx}(t.f) = \iint G(t-u.\tau)\,x(u+\tau/2)\,x^*(u-\tau/2)\,e^{-j2\pi f\tau}\,du\,d\tau \qquad (۳)$$

که در آن:

- t و f به‌ترتیب نشان‌دهنده متغیرهای زمان و بسامد هستند.
- G(t,τ) کرنل زمان- بسامد یا کرنل زمان- لگ[1] نامیده می‌شود.
- تمامی انتگرال‌ها در بازه ∞- تا ∞+ می‌باشند.
- τ را متغیر لگ می‌نامند که شیفت زمان است.

همان‌طور که از معادله (۳) مشاهده می‌شود، توزیع زمان- بسامد یک تبدیل دو- بعدی است که علامت در حوزه زمان را به حوزه زمان و بسامد انتقال می‌دهد.

فرم گسسته توزیع زمان- بسامد اغلب به‌صورت زیر بیان می‌گرد [۱۸]:

$$D_{xx}(t.f) = \sum_{u=-\infty}^{\infty}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} G(t-u.\tau)\,x(u+\tau)\,x^*(u-\tau)\,e^{-j2\pi f\tau} \qquad (۴)$$

برای شکل گسسته، جمله‌های متقابل توزیع زمان- بسامد دو علامت $x_i(t)$ و $x_k(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۸]:

$$D_{x_i x_k}(t.f) = \sum_{u=-\infty}^{\infty}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} G(t-u.\tau)\,x_i(u+\tau)\,x_k^*(u-\tau)\,e^{-j2\pi f\tau} \qquad (۵)$$

بسته به نوع کاربرد، باید بهترین کرنل زمان- بسامد شناسایی و از آن استفاده شود. در جدول ۱، نمونه‌هایی از کرنل‌های زمان- بسامد آورده شده است [۱۹].

جدول ۱ برخی از کرنل‌های زمان- بسامد متداول.

توزیع / کرنل	کرنل زمان- لگ
	G(t,τ)
ویگنر- ویل (دابلیووی‌دی)	δ(t)
شبه ویگنر- ویل (پی‌دابلیووی‌دی)	δ(t)w(t)
چوی- ویلیامز (سی‌دابلیووی)	$\frac{\sqrt{\pi\sigma}}{\lvert\tau\rvert}\exp(\pi^2\sigma t^2/\tau^2)$

که w(t) و σ به ترتیب معرف یک پنجره دلخواه و شبه‌سنج ثابت سیگما هستند.

توزیع زمان- بسامد فضایی تعمیمی از توزیع زمان- بسامد برای بردار علامت‌های خروجی آرایه است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_{xx}(t.f) = \sum_{u=-\infty}^{\infty}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} G(t-u.\tau)\,X(u+\tau)\,X^H(u-\tau)\,e^{-j2\pi f\tau} \qquad (۶)$$

۳. الگوریتم‌های جهت‌یابی مبتنی بر توزیع زمان- بسامد

ماتریس کوواریانس داده‌های خروجی آرایه به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$R_{xx} = \left[X(t)\,X^H(t)\right] \qquad (۷)$$

که در آن E(.) اپراتور امید ریاضی آماری و $(.)^H$ نشان‌دهنده مزدوج ترانهاده است. با استفاده از رابطه (۱) می‌توان دید که ماتریس کوواریانس داده ساختاری به‌صورت زیر است:

$$R_{xx} = A(\Theta)\,R\,A^H(\Theta) + \sigma^2 I \qquad (۸)$$

[1] Time-lag kernel

که در آن $R_{ss}=E\left[s(t)s^H(t)\right]$ ماتریس کوواریانس علامت منابع است، σ^2 توان نوفه در هر حسگر است و I ماتریس یکه است.

در حضور نوفه و با جای‌گذاری (۱) در (۵) و با توجه به فرض یقینی بودن علامت منابع و گوسی بودن نوفه [۱۸]:

$$E\left[D_{xx}(t,f)\right]=A(\Theta)\,D_{ss}(t,f)\,A^H(\Theta)+\sigma^2 I \tag{۹}$$

که در آن $D_{ss}(t,f)$ ماتریس توزیع زمان- بسامد فضایی بردار علامت‌های منابع است (با همان رابطه‌ی (۵) تعریف می‌شود و البته در آن رابطه به جای بردار x باید بردار علامت منابع یعنی s گذاشته شود).

$$D_{ss}(t,f)=\sum_{u=-\infty}^{\infty}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}G(t-u,\tau)S(u+\tau)S^H(u-\tau)e^{-j2\pi f\tau} \tag{۱۰}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، رابطه (۸) بسیار شبیه به رابطه (۷) است و میانگین آماری $D_{xx}(t,f)$ الگوی کاملاً مشابه با ماتریس کوواریانس داده‌های خروجی آرایه دارد. از آن‌جا که در پردازش‌های آرایه‌ای استفاده از ماتریس کوواریانس داده‌های خروجی آرایه، اساس بسیاری از روش‌های جهت‌یابی مبتنی بر زیر فضا را تشکیل می‌دهد. از این شباهت دیده می‌شود که می‌توان در روش‌های جهت‌یابی مرسوم به جای ماتریس کوواریانس داده‌های خروجی آرایه از میانگین آماری $D_{xx}(t,f)$ استفاده کرد. به این ترتیب روش‌های جهت‌یابی مبتنی بر توزیع‌های زمان- بسامد به‌دست می‌آید. به‌عنوان مثال در الگوریتم‌های جهت‌یابی میوزیک و اسپریت می‌توان به جای ماتریس کوواریانس داده‌های خروجی آرایه از میانگین آماری $D_{xx}(t,f)$ استفاده کرد و روش‌های جهت‌یابی که به این ترتیب به‌دست می‌آیند را به ترتیب میوزیک زمان- بسامد و اسپریت زمان- بسامد نامید.

در عمل نمی‌توان میانگین آماری $D_{xx}(t,f)$ را به‌دست آورد ولی می‌توان روی مقادیر $D_{xx}(t,f)$ در تعدادی از نقاط (t,f) میانگین‌گیری کرد و آن‌چه به‌دست می‌آید را $\hat{D}$ نامید و از آن به عنوان تقریبی از میانگین آماری $D_{xx}(t,f)$ استفاده کرد. در انتخاب نقاط (t,f) هم می‌توان به این صورت عمل کرد که باید نقاطی را انتخاب کرد که $D_{xx}(t,f)$ در آن‌ها دارای قله است. با این کار، در واقع نقاطی که علامت‌های منابع در آن‌ها مؤلفه‌ی قوی دارند و نسبت علامت به نوفه آن‌ها زیاد است، استفاده می‌شوند و به این ترتیب باعث بهبود شدید عملکرد روش‌های جهت‌یابی مبتنی بر توزیع‌های زمان- بسامد می‌شوند. مراحل محاسبه‌ی $\hat{D}$ در «الگوریتم ۱» ارائه شده است.

۳-۱. میوزیک و میوزیک زمان- بسامد

یکی از روش‌های شناخته‌شده برای تخمین زوایای ورود منابع، الگوریتم میوزیک است. شبه‌طیف مورد استفاده در الگوریتم میوزیک با توجه به گسترش طیفی ماتریس کوواریانس آرایه و با روش تجزیه ویژه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [۲۰]:

$$P_{MUSIC}(\theta)=\frac{1}{\sum_{i=n+1}^{m}\left|a(\theta)v_i\right|^2} \tag{۱۱}$$

که در این رابطه $a(\theta)$ بردار هدایت و $\hat{v}_i$ بردار ویژه‌ی i-اُم از ماتریس کوواریانس تخمین زده‌شده برای داده‌های خروجی آرایه هستند. زاویه‌ی منابع علامت با یافتن محل قلّه‌های شبه‌طیف تخمین‌زده می‌شود.

شبه‌طیف مورد استفاده در الگوریتم میوزیک زمان- بسامد نیز با توجه به گسترش طیفی ماتریس زمان- بسامد $\hat{D}$ و با روش تجزیه ویژه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [۱۸]:

$$P_{TF-MUSIC}(\theta)=\frac{1}{\sum_{i=n+1}^{m}\left|a(\theta)v_i^{tf}\right|^2} \tag{۱۲}$$

که در این رابطه، V_i^{tf} بردار ویژه‌ی i-اُم از ماتریس $\hat{D}$ است. تخمین زاویه‌ی منابع علامت هم مانند قبل به‌دست می‌آید.

۳-۲. اسپریت و اسپریت زمان- بسامد

الگوریتم اسپریت از ساختاری با دو زیر آرایه تغییرناپذیر از یک آرایه برای تخمین جهت استفاده می‌کند [۲۱]. از آن‌جایی که الگوریتم اسپریت می‌تواند زوایا را بدون نیاز به پیدا کردن قلّه در طیف به‌دست آورد، پیچیدگی محاسباتی آن کم‌تر از الگوریتم میوزیک است. در الگوریتم اسپریت برای تخمین شبه‌سنج‌های علامت از طریق فنّ‌های عدم‌تغییر چرخشی[1] استفاده می‌شود. اسپریت زمان- بسامد همانند اسپریت مرسوم است با این تفاوت که به‌جای ماتریس کوواریانس از ماتریس زمان- بسامد

[1] Rotational invariance techniques

استفاده می‌کند. مراحل محاسبه‌ی اسپریت زمان- بسامد در «الگوریتم ۲» آمده است [۱۳].

۳-۲-۱. الگوریتم ۱: محاسبه ماتریس $\hat{D}$

- محاسبه ماتریس توزیع زمان- بسامد $D_{xx}(t,f)$

$$D_{xx}(t.f) = \begin{pmatrix} D_{x_1x_1}(t.f) & \cdots & D_{x_1x_m}(t.f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{x_mx_1}(t.f) & \cdots & D_{x_mx_m}(t.f) \end{pmatrix}$$

- با انتخاب توزیع‌های زمان- بسامد خودی به‌صورت $\{D_{x_{i.i}}(t.f)\}_{i=1}^{m}$، میانگین توزیع زمان- بسامد به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\bar{D}(t.f) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} D_{x_{ii}}(t.f)$$

- انتخاب نقاط زمان- بسامد با انرژی بالا

$$\text{Select } (t_i.f_i) \text{ if } \left\|\bar{D}(t.f)\right\| > \varepsilon$$

و نقاط (t,f) با انرژی ناچیز (که عمدتاً مربوط به نوفه هستند) برای بهبود نسبت علامت به نوفه حذف می‌شوند. آستانه یا شاخص قدرت[1] (ε) یک شبه‌سنج تعریف‌شده توسط کاربر است و به‌صورت زیر حساب می‌شود.

$$\varepsilon \geq \varepsilon_{first} \times \max(\bar{D}(t.f))$$

آستانه اولیه عددی دلخواه است که توسط کاربر تعریف می‌شود و عددی بین صفر و یک است. این آستانه‌گذاری برای حذف مشارکت نقاط شامل نوفه است.

- محاسبه میانگین ماتریس توزیع زمان- بسامد $\hat{D}$، با استفاده از میانگین نقاط زمان- بسامد انتخاب‌شده در مرحله قبلی به‌صورت زیر:

$$\hat{D} = \frac{1}{n_{select}}\sum_{i=1}^{n_{select}} D_{xx}(t_i.f_i)$$

که در آن n_{select} تعداد نقاط (t,f) انتخاب‌شده در مرحله قبل را نشان می‌دهد.

۳-۲-۲. الگوریتم ۲: الگوریتم تخمین‌گر اسپریت زمان- بسامد

- محاسبه میانگین ماتریس توزیع زمان- بسامد: $\hat{D}$

- محاسبه بردارهای ویژه با اعمال تجزیه ویژه به ماتریس $\hat{D}$:

$$\hat{V}^{tf} = \left[\hat{V}_1^{tf}.\hat{V}_2^{tf}.---.\hat{V}_m^{tf}\right]$$

- تشکیل زیرفضای علامت:

$$V_s^{tf} = \left[\hat{V}_1^{tf}.\hat{V}_2^{tf}.---.\hat{V}_m^{tf}\right]$$

- محاسبه دو ماتریس V_1^{tf} و V_2^{tf} با استفاده از ماتریس V_s^{tf}:

$$V_s^{tf} = \begin{bmatrix} V_1^{tf} \\ \text{first row} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{first row} \\ V_2^{tf} \end{bmatrix}$$

- محاسبه ماتریس ψ^{tf} با استفاده از روش کمینه مربعات:

$$V_2^{tf} = V_1^{tf}\Psi^{tf}$$

$$\Psi^{tf} = ((V_1^{tf})^H V_1^{tf})^{-1}(V_1^{tf})^H V_2^{tf}$$

با محاسبه مقادیر ویژه ماتریس ψ^{tf} به‌صورت $\left[\psi_1^{tf}.\psi_2^{tf}.....\psi_n^{tf}\right]$ تخمین زوایای ورود به شکل زیر صورت می‌گیرد:

$$\theta_i = -\arcsin\left(\frac{\lambda \arg\left(\varphi_i^{tf}\right)}{2\pi d}\right) \; ; \; i = 1,2,...$$

که در آن d فاصله حسگرهای آرایه و λ، طول موج علامت متناظر با بسامد مرکزی علامت هستند.

۴. شبیه‌سازی

در این بخش نتایج حاصل از اعمال الگوریتم‌های جهت‌یابی به دو منبع با دو علامت با مدولاسیون بسامد خطی ارائه می‌شود. آرایه، خطی یکنواخت در نظر گرفته شده و فاصله حسگرها برابر نصف طول موج متناظر با بسامد مرکزی است.

در همه شبیه‌سازی‌های این بخش به‌جز شبیه‌سازی شکل ۱۲ از الگوی رابطه (۱) برای تولید داده‌ها استفاده می‌شود. از آن‌جا که علامت‌های مورد نظر دارای بسامد متغیر هستند ولی میزان تغییر بسامد آن‌ها نسبت به بسامد اولیه‌ی علامت کم است، باز هم می‌توان با تقریب این علامت‌ها را باریک‌باند فرض کرد. به همین علت در هنگام استفاده از رابطه (۱) برای تولید علامت‌ها، ماتریس هدایت ثابت در نظر گرفته شده و از بسامد میانگین علامت هر منبع در آن استفاده می‌شود.

[1] Strength indicator

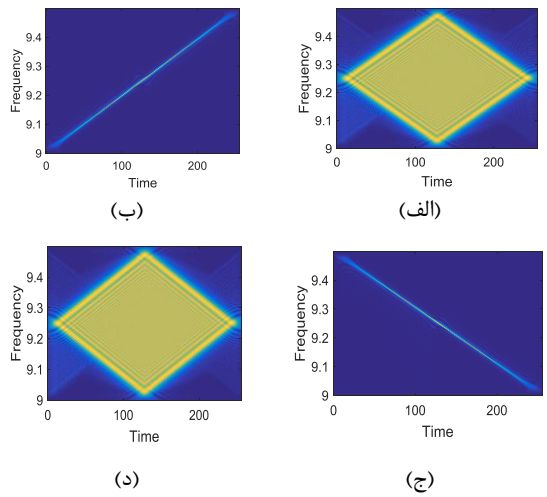
جدول ۲ مشخصات سامانه آرایه و علامت منابع.

M	۱۰
N	۲
DOA	[۱۰, -۱۰]
Δf_1	[۹, ۹/۵]
Δf_2	[۹/۵, ۹]
D	$\lambda_c/2$

از آن‌جا که علامت‌های مورد استفاده در شبیه‌سازی‌های این بخش را می‌توان با تقریب باریک‌باند در نظر گرفت، در هنگام استفاده از روش‌های جهت‌یابی مرسوم، از نسخه‌ی باریک‌باند این روش‌ها استفاده می‌شود و بسامد میانگین علامت‌های منابع به عنوان بسامد منابع در نظر گرفته می‌شوند.

۴-۱. نتایج شبیه‌سازی‌ها

در شکل ۱، نمایش زمان- بسامد دو علامت با مدولاسیون بسامد خطی با کرنل ویگنر- ویل دیده می‌شود. در این شکل، نمایش جمله‌های خودی و متقابل دو علامت ورودی دیده می‌شود. شکل‌های ۱-(الف) و ۱-(د) نمایش جمله‌های متقابل دو علامت ورودی هستند. شکل ۱-(ب) نمایش $D_{s_1s_1}$ یعنی جمله خودی منبع اول است که یک علامت خطی با بسامد اولیه ۹ هرتز و بسامد پایانی ۹/۵ هرتز است. شکل۱-(ج) نیز نمایش $D_{s_2s_2}$ یعنی جمله خودی منبع دوم است که یک علامت خطی با بسامد اولیه ۹/۵ هرتز و بسامد پایانی ۹ هرتز است.



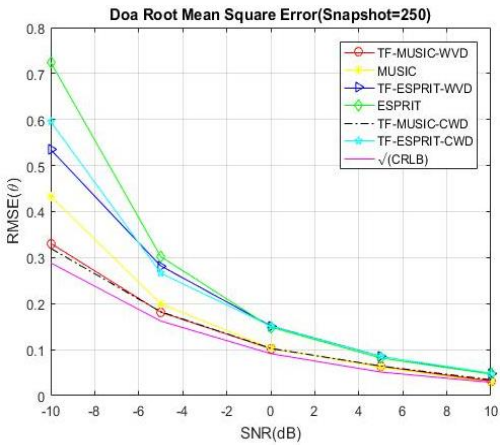
شکل ۱ اثر کرنل ویگنر- ویل بر علامت با مدولاسیون بسامد خطی.

خطای جذر میانگین مربعات[1]، نشان‌دهنده تفاوت میان مقدار تخمین‌زده شده و مقدار واقعی می‌باشد. این معیار یک ابزار خوب برای مقایسه خطاهای پیش‌بینی یا تخمین توسط یک مجموعه داده است. برای بررسی این معیار باید مقدار شبه‌سنج تخمین‌زده شده $\hat{\theta}$ و مقدار واقعی این شبه‌سنج θ معلوم باشد. در این‌جا شبه‌سنج‌ها همان زوایای ورود هستند [۲۲].

$$RMSE\left(\hat{\theta}\right) = \sqrt{MSE(\hat{\theta})} = \sqrt{E((\hat{\theta}-\theta)^2)}$$

برای تخمین‌گر نااریب، خطای جذر میانگین مربعات، ریشه دوم واریانس است که به عنوان انحراف استاندارد شناخته می‌شود.

در شبیه‌سازی شکل ۲ عملکرد روش‌های جهت‌یابی میوزیک و اسپریت زمان- بسامد با دو کرنل ویگنر- ویل و چوی- ویلیامز، در نسبت‌های علامت به نوفه مختلف بررسی و با عملکرد روش‌های میوزیک و اسپریت مرسوم و نیز با کران پایین کرامر- رائو [۲۳] مقایسه می‌شوند [۱۸]. نتایج با میانگین‌گیری روی ۲۰۰ تکرار آزمایش به‌دست آمده و در هر تکرار از ۲۵۰ برداشت از داده‌های خروجی آرایه استفاده شده است.



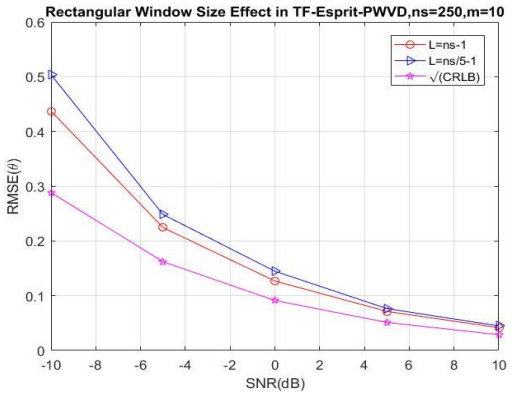
شکل ۲ اثر نسبت علامت به نوفه در جهت‌یابی زمان- بسامد.

همان‌طور که از شکل ۲ مشاهده می‌شود، روش‌های زمان- بسامد در نسبت‌های علامت به نوفه پایین عملکرد بهتری نسبت به روش‌های مرسوم دارند. در این شبیه‌سازی شبه‌سنج سیگما در کرنل چوی- ویلیامز برابر ۲ در نظر

[1] RMSE; Root-Mean-Square Error

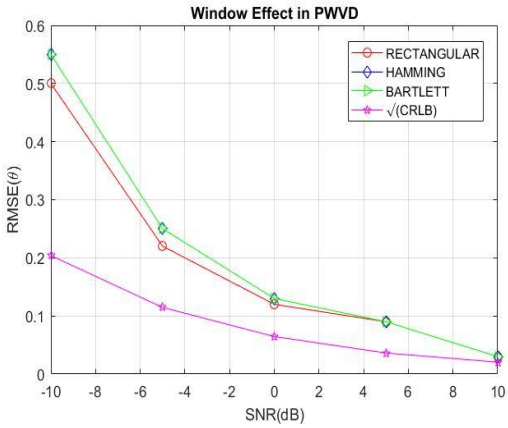
گرفته شده است.

همان‌گونه که در جدول ۱ دیده می‌شود در کرنل شبه ویگنر-ویل از پنجره استفاده می‌شود. در شبیه‌سازی شکل ۳ اثر طول پنجره مستطیلی روی عملکرد اسپریت زمان-بسامد با کرنل شبه ویگنر-ویل بررسی شده است. تعداد برداشت‌ها مانند شکل ۲ است و دیده می‌شود که هر چه طول پنجره بیش‌تر می‌شود، عملکرد جهت‌یابی بهبود می‌یابد. باید توجه داشت که طول پنجره عددی فرد است.



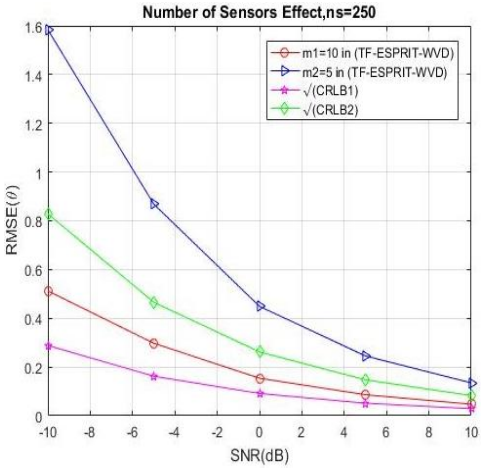
شکل ۳ اثر طول پنجره در جهت‌یابی با کرنل شبه ویگنر-ویل.

در شبیه‌سازی شکل ۴ اثر نوع پنجره روی عملکرد جهت‌یابی با اسپریت زمان-بسامد با کرنل شبه ویگنر-ویل بررسی شده است.



شکل ۴ اثر نوع پنجره در جهت‌یابی با کرنل شبه ویگنر-ویل.

از سه پنجره مستطیلی، همینگ و بارتلت در کرنل شبه ویگنر-ویل استفاده شده است و همان‌طور که دیده می‌شود، جهت‌یابی با پنجره مستطیلی دقت بهتری دارد چون می‌توان گفت که پنجره‌های دیگر علامت را به نوعی تضعیف می‌کنند. طول پنجره در این شبیه‌سازی برابر طول علامت است. این نتایج با میانگین‌گیری روی ۲۰۰ تکرار آزمایش به‌دست آمده و در هر تکرار از ۵۰۰ برداشت از داده‌های خروجی آرایه استفاده شده است.



شکل ۵ اثر تعداد حسگرها در اسپریت زمان-بسامد.

در شبیه‌سازی شکل ۵، اثر تعداد حسگرها در جهت‌یابی با الگوریتم اسپریت زمان-بسامد با کرنل ویگنر-ویل بررسی شده است. در این شبیه‌سازی یک‌بار تعداد حسگرها برابر پنج و یک‌بار برابر ده در نظر گرفته شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، هر چه تعداد حسگرها بیش‌تر می‌شود عملکرد جهت‌یابی بهبود می‌یابد. این نتیجه با میانگین‌گیری روی ۱۰۰ تکرار آزمایش و ۲۵۰ برداشت در هر تکرار به‌دست آمده است.

در شکل ۶، اثر نوع علامت در جهت‌یابی با روش اسپریت زمان-بسامد با کرنل ویگنر-ویل دیده می‌شود. در این شبیه‌سازی از علامت با مدولاسیون بسامد خطی و نیز از علامت با مدولاسیون بسامد درجه دوم استفاده شده است. همانند علامت با مدولاسیون بسامد خطی، برای علامت با مدولاسیون بسامد درجه دوم[1] نیز معادله علامت به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$s(t) = A\exp(j\theta(t))$$

و بسامد لحظه‌ای بر حسب هرتز، به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

[1] QFM

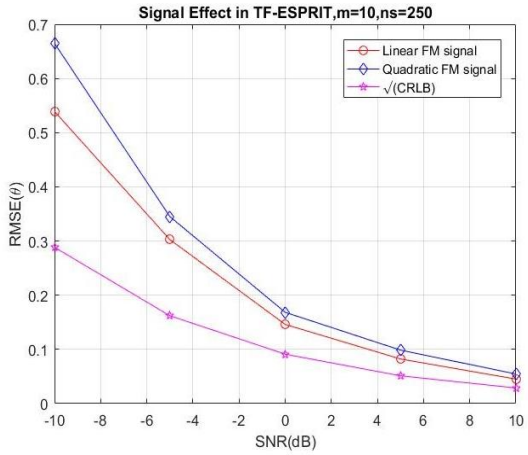
$$f_1(t) = f_0 + 2\alpha t^2$$

توجه شود که آهنگ افزایش بسامد برای علامت با مدلاسیون بسامد خطی، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$k = 2\alpha = \frac{f_1 - f_2}{T^2}$$

در این علامت فاز لحظه‌ای دارای مشتق زمانی معادل با $2\pi(f_0 + kt^2)$ است و علامت با رابطه زیر نشان داده می‌شود:

$$s(t) = A\exp(j2\pi(f_0 t + \tfrac{1}{3} kt^3)) = A\exp(j2\pi(f_0 t + \tfrac{2}{3}\alpha t^3))$$



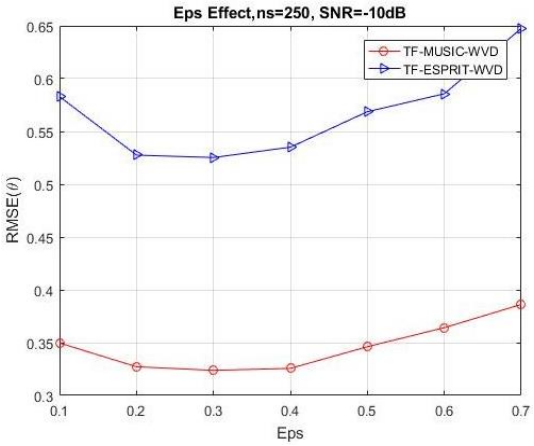
شکل ۶ اثر نوع علامت در اسپریت زمان- بسامد.

در این شبیه‌سازی عملکرد جهت‌یابی در نسبت‌های علامت به نوفه مختلف بررسی شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، جهت‌یابی با علامت با مدولاسیون بسامد خطی عملکرد بهتری نسبت به علامت با مدولاسیون بسامد درجه دوم دارد، زیرا برای علامت با مدولاسیون بسامد خطی به دلیل خطی بودن تغییرات بسامدی، نقاط بهتری نسبت به علامت با مدولاسیون بسامد درجه دوم انتخاب شده است. نتایج این شبیه‌سازی با میانگین‌گیری روی ۱۰۰ تکرار آزمایش و ۲۵۰ برداشت در هر تکرار به‌دست آمده است.

همان‌طور که گفته شد، مهم‌ترین مسئله در جهت‌یابی مبتنی بر توزیع‌های زمان- بسامد انتخاب نقاط در محدوده نمایش زمان- بسامد علامت‌ها است. نقاط زمان- بسامد به‌صورتی انتخاب می‌شوند که کم‌ترین مشارکت نوفه و بیش‌ترین مشارکت علامت وجود داشته باشد؛ بنابراین برای انتخاب نقاط با انرژی زیاد باید یک آستانه یا شاخص قدرت انتخاب گردد. در شکل ۷ اثر شاخص قدرت (ε) بررسی شده است. در این شبیه‌سازی از دو علامت با مدولاسیون بسامد خطی استفاده می‌شود. همانند شبیه‌سازی‌های قبل بسامد شروع و پایان علامت اول برابر با (۹/۵، ۹) و بسامد شروع و پایان علامت دوم برابر با (۹، ۹/۵) در نظر گرفته شده است. رابطه آستانه در «الگوریتم۱» به‌صورت زیر معرفی شد:

$$\varepsilon \geq \varepsilon_{first} \times \max(\bar{D}(t.f))$$

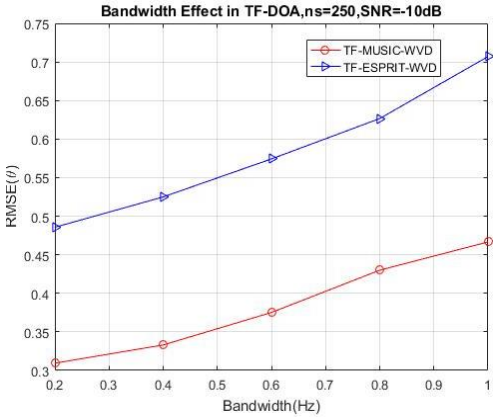
در شکل ۷ محور افقی مقدار ε_{first} را نشان می‌دهد.



شکل ۷ اثر آستانه در جهت‌یابی زمان- بسامد.

از شبیه‌سازی شکل ۷ دیده می‌شود، ابتدا با افزایش آستانه خطای تخمین کاهش می‌یابد و سپس هر چه این آستانه بزرگ‌تر می‌گردد، خطای تخمین افزایش می‌یابد. این نتیجه را می‌توان به این نحو تعبیر کرد که ابتدا برای آستانه‌های کوچک در انتخاب نقاط زمان- بسامد علاوه بر مشارکت علامت، مشارکت نوفه نیز وجود دارد. بنابراین برای نسبت‌های علامت به نوفه کوچک، خطا زیاد است و با افزایش آستانه این خطا کم‌تر می‌شود چون مشارکت نوفه کم‌تر می‌گردد. در ادامه هر چه آستانه بزرگ‌تر می‌شود دوباره خطا افزایش می‌یابد. این افزایش دوباره خطا به این علت است که این بار در انتخاب نقاط زمان- بسامد مشارکت نوفه کم است ولی تعداد نقاطی که در میانگین‌گیری برای تشکیل ماتریس $\hat{D}$ وجود دارد، نیز کاهش می‌یابد، که باعث افزایش خطا می‌شود. نتایج این شبیه‌سازی با میانگین‌گیری روی ۴۰۰ تکرار آزمایش به‌دست آمده و از ۲۵۰ برداشت در هر تکرار استفاده شده است. نسبت علامت به نوفه هم برابر با ۱۰- بوده است.

در شبیه‌سازی‌های شکل ۸ اثر پهنای باند علامت منابع بر عملکرد جهت‌یابی بررسی شده است. در این شکل از دو علامت با مدولاسیون بسامد خطی استفاده می‌شود که پهنای باند آن‌ها با هم برابر است ولی بسامد علامت اول رو به افزایش و بسامد علامت دوم رو به کاهش است. فاصله بین حسگرها برابر نصف طول موج برای بالاترین بسامد در نظر گرفته شده و با افزایش پهنای باند ثابت می‌ماند. نسبت علامت به نوفه نیز در این شبیه‌سازی ثابت در نظر گرفته می‌شود. بسامد شروع برای علامت اول برابر ۹ هرتز در نظر گرفته شده است. مجموع بسامد شروع و پهنای باند، بسامد پایانی را در هر مورد مشخص می‌کند.



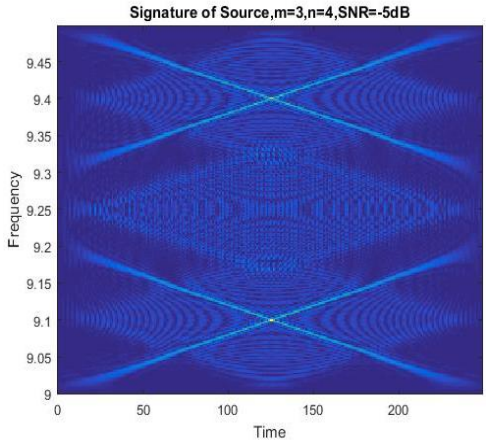
شکل ۸ اثر افزایش پهنای باند بر جهت‌یابی.

از شکل ۸ دیده می‌شود که با افزایش پهنای باند علامت‌ها خطای جهت‌یابی افزایش می‌یابد. نتایج این شبیه‌سازی با میانگین‌گیری روی ۲۰۰ تکرار و ۲۵۰ برداشت در هر تکرار استفاده شده است. نسبت علامت به نوفه هم برابر با ۱۰- بوده است. توجه شود که افزایش پهنای باند تا حدی صورت گرفته است که باز هم بتوان علامت‌های منابع را باریک‌باند فرض کرد.

یکی از مزایای روش‌های جهت‌یابی مبتنی بر توزیع‌های زمان- بسامد این است که در حالتی‌که تعداد منابع بیش‌تر از تعداد حسگرها است نیز می‌توان با استفاده از این روش‌ها جهت منابع را تخمین زد. البته فرآیند جهت‌یابی باید چند بار تکرار شود و هر بار جهت تعدادی از منابع تخمین زده شود به‌گونه‌ای که در هر بار جهت‌یابی تعداد منابعی که جهت آن‌ها تخمین زده می‌شود، کم‌تر از تعداد حسگرها باشد. این کار به این نحو صورت می‌گیرد که هر بار با مشاهده نمایش زمان- بسامد علامت‌ها، نقاط انتخاب‌شده در میانگین‌گیری از محدوده زمان- بسامد n_s علامت انتخاب شده و ماتریس $\hat{D}$ متناظر با نقاط این علامت‌ها تشکیل می‌گردند. در این صورت هر بار قلّه‌های متناظر با n_s علامت انتخابی در ماتریس $\hat{D}$ وجود دارد. باید توجه گردد که تعداد علامت‌های انتخابی کم‌تر از تعداد حسگرها باشد ($n_s<m$) و در این صورت خللی در الگوریتم‌های مبتنی بر زیر فضا پیش نمی‌آید، زیرا در این الگوریتم‌ها باید تعداد منابع کم‌تر از تعداد حسگرها باشد؛ به عبارت دیگر مزیت ماتریس زمان- بسامد این است که هر بار می‌توان نقاط انتخاب‌شده را از علامت‌های کم‌تری نسبت به تعداد حسگرها انتخاب کرد، در این صورت می‌توان با الگوریتم‌های زمان- بسامد جهت‌یابی را صورت داد. در این حالت ماتریس $\hat{D}$ با میانگین‌گیری در محل قلّه‌های متناظر با n_s علامت انتخاب‌شده به‌دست می‌آید:

$$\hat{D} = \frac{1}{n_s N'} \sum_{q=1}^{n_s} \sum_{i=1}^{N'} D_{xx}(t_i, f_{q,i}(t_i)) \qquad (۱۲)$$

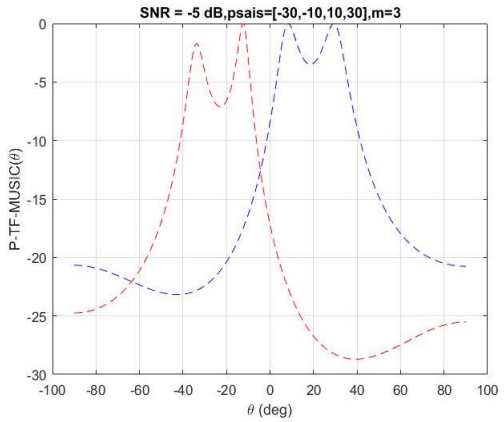
که در آن $f_{q,i}(t_i)$ بسامد q-اُمین علامت در i-اُمین نمونه زمان است. N نشان‌دهنده کل نمونه‌های مشاهدات است و N' نشان‌دهنده تعداد نقاط انتخاب شده است. سپس با استفاده از تجزیه زیرفضای ماتریس $\hat{D}$، جهت‌یابی برای n_s علامت انتخاب‌شده انجام می‌گیرد. این‌کار چند بار صورت می‌پذیرد، تا برای همه منابع تخمین زوایا صورت گیرد.



شکل ۹ نمایش علامت منابع در محدوده زمان- بسامد روی حسگر اول.

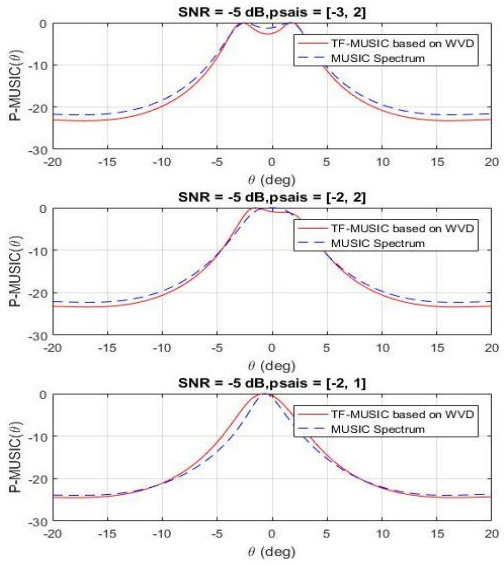
در شکل ۹ توزیع زمان- بسامد برای چهار علامت با مدولاسیون بسامد خطی نشان داده شده است که به

ترتیب بسامد آن‌ها در محدوده‌ی ۹ تا ۹٫۲ هرتز، ۹٫۲ تا ۹ هرتز، ۹٫۳ تا ۹٫۵ هرتز و ۹٫۵ تا ۹٫۳ هرتز تغییر می‌کند. هم‌چنین زوایای علامت‌ها به ترتیب برابر با ۳۰-، ۱۰-، ۱۰ و ۳۰ درجه است. در این شکل اثر جمله‌های خودی و متقابل نیز در توزیع زمان- بسامد دیده می‌شود. هم‌چنان که از شکل ۹ مشخص است جمله‌های خودی به‌صورت خطی و جمله‌های متقابل به‌صورت لوزی نشان داده شده است. برای جهت‌یابی این چهار علامت، هر بار ماتریس $\hat{D}$ از نقاط متناظر برای دو علامت که در یک محدوده بسامدی قرار دارند تشکیل می‌شود و بردار هدایت متناسب با بسامد مرکزی آن‌ها در نظر گرفته می‌شود. نتایج این جهت‌یابی در شکل ۱۰ نشان داده شده است. در این مثال از کرنل ویگنر- ویل استفاده شده است. دو علامت دارای بسامدهای ابتدا و انتهای (۹٫۲، ۹) هرتز و (۹، ۹٫۲) هرتز با هم و دو علامت دارای بسامدهای ابتدا و انتهای (۹٫۵، ۹٫۳) هرتز و (۹٫۳، ۹٫۵) هرتز با هم جهت‌یابی می‌شوند. این شبیه‌سازی در نسبت علامت به نوفه برابر با ۵- دسی‌بل انجام شده است.



شکل ۱۰ طیف میوزیک زمان- بسامد.

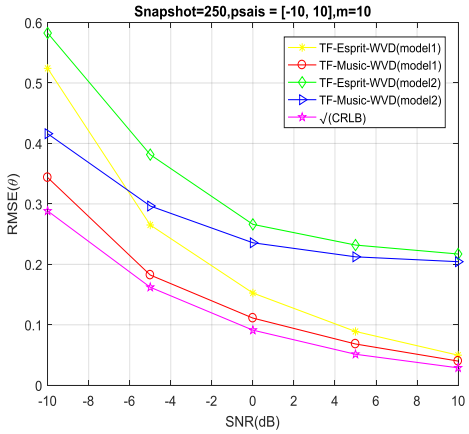
یکی از مهم‌ترین بررسی‌هایی که باید در جهت‌یابی‌ها صورت گیرد، بررسی قدرت تفکیک است. برای این بررسی، دو علامت با مدولاسیون بسامد خطی در نظر گرفته می‌شود که بسامدهای شروع و پایان علامت‌های اول و دوم به ترتیب برابر (۹٫۵، ۹) هرتز و (۹، ۹٫۵) هرتز هستند. هم‌چنین تعداد نقاط نمونه‌برداری برابر با ۵۰۰ و تعداد حسگرهای آرایه برابر با ۱۰ در نظر گرفته شده است. روش انجام این شبیه‌سازی به این صورت است که در یک نسبت علامت به نوفه خاص دو جهت مختلف برای منابع در نظر گرفته می‌شود. سپس منابع به‌طور پیوسته به‌هم نزدیک شده و طیف میوزیک و میوزیک زمان- بسامد برای آن‌ها رسم می‌شوند و این کار ادامه داده می‌شود تا آستانه‌ای برای تفکیک پیدا شود. در این شبیه‌سازی آستانه برابر با آن مقدار اختلاف زاویه‌ای است که اگر منابع اندکی از آن به هم نزدیک‌تر شوند دو قلّه در طیف تبدیل به یک قلّه شود. در شبیه‌سازی شکل ۱۱ دو طیف میوزیک و میوزیک زمان- بسامد با کرنل ویگنر- ویل و در نسبت علامت به نوفه برابر با ۵- دسی‌بل رسم شده است. همان‌طور که از شبیه‌سازی مشخص است در نسبت علامت به نوفه برابر با ۵- دسی‌بل، حد تفکیک میوزیک زمان- بسامد حدود ۴ درجه و حد تفکیک میوزیک معمولی حدود ۵ درجه است. بنابراین در یک نسبت علامت به نوفه ثابت دیده می‌شود که قدرت تفکیک جهت‌یابی‌های مبتنی بر توزیع‌های زمان- بسامد بهتر از روش‌های مرسوم جهت‌یابی است.



شکل ۱۱ قدرت تفکیک میوزیک و میوزیک زمان- بسامد.

در شبیه‌سازی شکل ۱۲، از هر دو الگوی علامت توضیح داده شده در بخش‌های ۲-۱ و ۲-۲ استفاده شده و از آن‌ها در جهت‌یابی‌های مبتنی بر زمان- بسامد استفاده شده است. کرنل استفاده شده در این دو الگو، کرنل ویگنر- ویل است. الگوی ۱ و الگوی ۲ به ترتیب همان الگوهای داده بخش‌های ۲-۱ (الگوی باریک‌باند) و ۲-۲

(الگوی پهن‌باند) هستند. در این شبیه‌سازی تعداد حسگرها برابر با ۱۰ و تعداد برداشت‌ها برابر با ۲۵۰ است و نتایج این شبیه‌سازی با میانگین‌گیری روی ۳۰۰ تکرار آزمایش به‌دست آمده است. برای آن‌که خطا در هنگام استفاده از الگوی ۲ در شبیه‌سازی ناچیز باشد، بسامد نمونه‌برداری در هنگام استفاده از این الگوی بسیار بزرگ و به اندازه‌ی ۴۰ برابر بالاترین مؤلفه بسامدی موجود در علامت‌ها گرفته شده است. البته پس از این‌که علامت‌های مورد نیاز در شبیه‌سازی تولید شدند، بسامد نمونه‌برداری به دو برابر بالاترین مولفه بسامدی موجود در علامت‌ها کاهش یافت تا میزان محاسبات در الگوریتم جهت‌یابی زیاد نشود.



شکل ۱۲ مقایسه بین دو الگوی پهن‌باند و باریک‌باند در جهت‌یابی.

همان‌گونه که از شبیه‌سازی شکل ۱۲ دیده می‌شود، در صورت استفاده از الگوی پهن‌باند ۲ نتایج شبیه‌سازی خطای بیش‌تری را برای روش‌های جهت‌یابی نشان می‌دهند (به ویژه در هنگامی‌که مقدار علامت به نوفه بالاتر باشد). در واقع علامت‌های مورد استفاده را نمی‌توان علامت‌هایی دقیقاً باریک‌باند محسوب کرد و به همین علت الگوی پهن‌باندِ ۲ الگوی دقیق‌تر برای علامت خروجی آرایه است.

۵. پیچیدگی محاسباتی

فرض کنید N برابر با تعداد برداشت‌ها و m برابر با تعداد حسگرها و n برابر با تعداد منابع و p برابر با تعداد نقاط جستجو در الگوریتم میوزیک و میوزیک زمان- بسامد است. تخمین ماتریس زمان- بسامد $\hat{D}$ دارای پیچیدگی محاسباتی از مرتبه‌ی $O(m^2N^2\log_2^N)$ است، در حالی‌که پیچیدگی محاسباتی تخمین ماتریس کوواریانس داده‌ها از مرتبه $O(m^2N)$ است. هم‌چنین تجزیه ویژه ماتریس توزیع زمان- بسامد و ماتریس کوواریانس داده‌ها نیازمند محاسباتی از مرتبه $O(m^2)$ است. بار محاسباتی تخمین زوایا در روش میوزیک و میوزیک زمان- بسامد از مرتبه‌ی $O(m^2np)$ و در روش اسپریت و اسپریت زمان- بسامد از مرتبه‌ی $O(m^2(m-1))$ هستند.

تفاوت پیچیدگی محاسباتی روش‌های جهت‌یابی مرسوم و روش‌های جهت‌یابی زمان- بسامد تنها در مرحله‌ی اول است که باید ماتریس زمان- بسامد یا ماتریس کوواریانس داده‌ها تخمین زده شود و در دو مرحله‌ی بعد پیچیدگی محاسباتی دو دسته روش تفاوتی ندارند. در مرحله‌ی اول هم همان‌گونه که دیده می‌شود میزان محاسبات روش‌های جهت‌یابی زمان- بسامد بیش‌تر از روش‌های جهت‌یابی مرسوم است.

۶. نتیجه‌گیری

شبیه‌سازی‌های صورت‌گرفته نشان دادند که روش‌های جهت‌یابی مبتنی بر توزیع‌های زمان- بسامد در نسبت‌های علامت به نوفه پایین دقت جهت‌یابی بهتری نسبت به روش‌های مرسوم دارند ولی در نسبت‌های علامت به نوفه بالا عملکرد این دو دسته روش تقریباً مشابه است. هم‌چنین از شبیه‌سازی‌ها دیده شد که روش‌های جهت‌یابی مبتنی بر توزیع‌های زمان- بسامد قدرت تفکیک بهتری نسبت به روش‌های مرسوم دارند.

بسته به نوع کرنلی که در توزیع‌های زمان- بسامد انتخاب می‌شود، می‌توان دقت جهت‌یابی را بهبود بخشید. شبیه‌سازی‌ها نشان دادند که با کرنل شبه ویگنر- ویل با انتخاب پنجره مستطیلی عملکردی بهتری نسبت به پنجره‌های دیگر به‌دست می‌آید و اگر طول پنجره مستطیلی برابر با طول علامت انتخاب شود عملکردی مشابه کرنل ویگنر- ویل به‌دست می‌آید. در شبیه‌سازی‌ها دیده شد که هر چه طول پنجره بیش‌تر شود عملکرد روش جهت‌یابی بهبود می‌یابد و بهترین عملکرد هنگامی است که طول پنجره برابر با طول علامت باشد.

باید به این نکته هم توجه داشت که دقت جهت‌یابی‌های مبتنی بر توزیع‌های زمان- بسامد بستگی به انتخاب کارآمد نقاط انتخاب‌شده در صفحه‌ی زمان- بسامد برای جهت‌یابی دارد، در واقع این نقاط باید به گونه‌ای برگزیده شوند که بیش‌ترین مشارکت علامت و کم‌ترین مشارکت نوفه در انتخاب نقاط به وجود آید.

شبیه‌سازی‌های به‌عمل‌آمده نشان دادند که با افزایش پهنای باند و یا کاهش تعداد حسگرها عملکرد روش‌های جهت‌یابی افت می‌کند. در شبیه‌سازی‌های این مقاله همه‌جا از علامت با مدولاسیون بسامد خطی استفاده شده است و تنها در شبیه‌سازی شکل ۶ علامت با مدولاسیون بسامد درجه دوم با علامت با مدولاسیون بسامد خطی مقایسه شده است و دیده شد که هر چه علامت خطی‌تر باشد عملکرد بهتری در انتخاب نقاط و جهت‌یابی به‌دست می‌آید. در شبیه‌سازی‌ها دیده شد که با توزیع زمان- بسامد حتی در حالتی‌که تعداد منابع بیش‌تر از حسگرها باشند نیز می‌توان جهت‌یابی را انجام داد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از حمایت انجمن علوم صوتی ایران تشکر می‌نمایند.

تضاد منافع

نویسندگان هیچ منافع مالی یا روابطی که بتواند بر انتشار این مقاله تأثیرگذار باشد ندارند.

فهرست منابع

[1] L. Cohen, “Time Frequency Analysis,” Englewood-Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1995.

[2] A. Belouchrani, M. Amin, “Time-frequency MUSIC,” IEEE Signal Processing Letters, vol. 6, no. 5, pp. 109-110, 1999.

[3] A. Gershman, M. Amin, “Wideband direction-of-arrival estimation of multiple chirp signals using spatial time-frequency distributions,” IEEE Signal Processing Letters, vol. 7, no. 6, pp. 152-155, 2000.

[4] Y. Zhang, W. Mu, M. Amin, “Time–frequency maximum likelihood methods for direction finding,” Journal of Franklin Institue, vol. 337, no. 4, pp. 483-497, 2000.

[5] Y. Zhang, W. Ma, M. Amin, “Subspace analysis of spatial time-frequency distribution matrices,” IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 49, no. 4, pp. 747-759, 2001.

[6] E. Mansour, C. Gervaise, A. Khenchaf, “Contributions to passive acoustic oceanic tomography- inversion algorithms based on time frequency space representation for multiple hydrophones processing,” Europe Oceans, 2005.

[7] Y. Zhang, B. Obeidat, M. Amin, “Spatial polarimetric time-frequency distributions for direction-of-arrival estimations,” IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 54, no. 4, pp. 1327-1340, 2006.

[8] W. Sharif, Y. Chakhchoukh, A. Zoubir, “Robust spatial time-frequency distribution matrix estimation with application to direction-of-arrival estimation,” Signal Processing, vol. 91, no. 11, pp. 2630-2638, 2011.

[9] M. Khodja, A. Belouchrani, K. Abed-Meraim, “Performance analysis for time-frequency MUSIC algorithm in presence of both additive noise and array calibration errors,” EURASIP Journal Advances in Signal Processing, vol. 1, 2012.

[10] K. Sabra, “Single snapshot spatial array processing using time-frequency distributions,” Journal of Acoustics Society of American, vol. 133, no. 5, pp. 3436-3436, 2013.

[11] K. Sabra, S. Anderson, “Subspace array processing using spatial time-frequency distributions: Applications for denoising structural echoes of elastic targets,” Journal of Acoustics Society of American, vol. 135, no. 5, pp. 2821-2835, 2014.

[12] H. Zhang, G. Bi, Y. Cai, S. Razul, C. See, “DOA estimation of closely-spaced and spectrally-overlapped sources using a STFT-based MUSIC algorithm,” Digital Signal Processing, vol. 52, pp. 25-34, 2016.

[13] J. Lin, X. Ma, S. Yan, C. Hao, “Time-Frequency Multi-Invariance ESPRIT for DOA Estimation,” IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters vol. 15, pp. 770-773, 2016.

[14] J. Shi, D. Yang, S. Shi, Z. Zhu, B. Hu, “Spatial time-frequency DOA estimation based on joint diagonalization using Jacobi rotation,” Applied Acoustics, vol. 116, pp. 24-32, 2017.

[15] K. Cui, W. Wu, J. Huang, X. Chen, N. Yuan, “DOA estimation of LFM signals based on STFT and multiple invariance ESPRIT,” AEU- International Journal of Electronics and Communications, vol. 77, pp. 10-17, 2017.

[16] S. Ouelha, A. Aissa-El-Bey, B. Boashash, “Improving DOA estimation algorithms using

high-resolution quadratic time-frequency distributions," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 65, no. 19, pp. 5179-5190, 2017.

[17] N. Ali Khan, S. Ali, M. Jansson, "Direction of arrival estimation using adaptive directional time-frequency distributions," Multidimensional Systems and Signal Processing, vol. 29, no. 2, pp. 503-521, 2016.

[18] B. Friedlander, T. Tuncer, "Classical and modern direction-of-arrival estimation," Academic Press; Chapter 6, Spatial Time-Frequency Distributions and DOA Estimation; pp. 185-217, 2009.

[19] B. Boashash, "Time Frequency Signal Analysis And Processing," 2nd ed. Amsterdam [i pozostałe]: Elsevier; Chapter 2, Heuristic Formulation of Time-Frequency Distributions, pp. 90-2, 2016.

[20] R. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," IEEE Trans Antennas Propag, vol. 34, no. 3, pp. 276-280, 1986.

[21] J. Steinwandt, F. Roemer, M. Haardt, "Second-order performance analysis of Standard ESPRIT," IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2017.

[22] T.E. Tuncer, B. Friedlander, "Classical and modern direction-of-arrival estimation," Academic Press, 2009.

[23] P. Stoica, A. Nehorai, "Music, maximum likelihood, and cramer-rao bound," IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. 37, no. 5, pp. 720-741, 1989.