

# یک الگوی شبکه - بولتزن برای شبیه‌سازی انتشار امواج غیرخطی فراصدا در محیط سیال دارای تضعیف

محمد عبدی<sup>۱</sup>، حمید فهري<sup>۲</sup>، مجتبی حاجی حسنی<sup>\*</sup>، شهریار غریب‌زاده<sup>۱</sup>

۱. دانشکده مهندسی پزشکی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۲. دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تربیت مدرس

## چکیده

امواج فراصدا (اولتراساوند) دارای کاربردهای پزشکی فراوانی در زمینه تشخیص و درمان هستند. شبیه‌سازی دقیق و مؤثر انتشار موج فراصدا و اندرکنش آن با بافت از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. طبیعت غیرخطی انتشار موج فراصدا، به خصوص در کاربردهای درمانی، نقش مهمی در فعل و انفعالات آن با بافت بدن بازی می‌کند. در حال حاضر سه رویکرد برای الگوسازی و شبیه‌سازی امواج غیرخطی فراصدایی در دینامیک محاسباتی مایعات وجود دارد؛ شیوه‌های ماکروسکوپی، مزوسکوپی و میکروسکوپی. در این تحقیق، یک شیوه مزوسکوپی براساس شبکه - بولتزن (ل‌بی‌ام) مورد بررسی قرار گرفته است. معادله بولتزن و عملگر برخورد برای شبیه‌سازی جریان یک مایع نیوتونی به جای بکارگیری سامانه متعارف معادلات ناویر-استوکس، پیوستگی و حالت استفاده شده است. با استفاده از الگوی پیشنهادی، امواج اعوجاج‌یافته‌ی غیرخطی و موج ضربه برای امواج غیرخطی فراصدایی دارای پراش در یک محیط مایع با تنکش محاسبه شده است. سپس نتایج حاصله با نتایج منتشر شده‌ی مشابه از الگوهای ماکروسکوپی مقایسه گردیده است. نتایج بیان‌گر آن است که ل‌بی‌ام یک روش دقیق و مؤثر برای الگوسازی و شبیه‌سازی غیرخطی بودن امواج غیرخطی فراصدایی با عدد ماخ تا ۰.۱ است که در گستره امواج فراصدا با کاربرد درمانی قرار می‌گیرند (مانند امواج فراصدای متمرکز شدت بالا).

**کلید واژه‌ها:** الگوی شبکه - بولتزن، انتشار غیرخطی، امواج فراصدا (اولتراساوند)، موج ضربه، پراش

## ۱. مقدمه

غیرخطی در سنگ‌شکن‌ها برای خرد کردن سنگ‌های کلیه و صفرا به کار می‌روند [۲]. جراحی‌های ای‌آی‌اف‌یو فرآیندی برای سوزاندن غیرتهاجمی بافت نرم است [۳]، که در درمان بزرگی و سرطان خوش‌خیم پروستات مورد استفاده قرار می‌گیرد [۴]. طراحی و بهینه‌سازی این روش‌های درمانی انگیزه اصلی برای شبیه‌سازی فراصدای غیرخطی است. برای ارائه یک الگوی دقیق برای شبیه‌سازی انتشار فراصدا باید پدیده‌های جذب، انکسار و غیرخطی بودن را در نظر داشت [۵].

فشار و سرعت دو متغیر مهم برای توصیف حرکت مایعات هستند. معادلات ناویر-استوکس، پیوستگی و حالت مجموعه‌ای از معادلات غیرخطی هستند که بسیاری از روش‌های محاسباتی برای توصیف حرکت مایعات از آن‌ها به دست آمده‌اند. این معادلات براساس

کاربرد امواج فراصدای (اولتراساوند)<sup>۱</sup> شدت بالا در سه دهه گذشته بسیار مورد توجه قرار گرفته است. شدت بالا منجر به آثاری می‌شود که نظریه خطی قادر به توضیح و پیش‌بینی آن‌ها نیست. این آثار شامل گسترش هماهنگ‌های (هارمونیک‌های) بالاتر و به وجود آمدن جبهه‌های موج می‌شود. از کاربردهای ماهیت غیرخطی در پزشکی می‌توان به عکس‌برداری هماهنگ (هارمونیک)، سنگ‌شکن و جراحی با امواج فراصدای متمرکز شدت بالا (ای‌آی‌اف‌یو)<sup>۲</sup> اشاره نمود. تولید تصاویر مبتنی بر هماهنگ، کنتراست و جزئیات بالاتری را در تصویر به همراه دارد [۱]. جبهه‌های موج به وجود آمده به وسیله امواج فراصدای

\* نویسنده پاسخگو: hajihassani@aut.ac.ir

<sup>1</sup> Ultrasound

<sup>2</sup> HIFU: High Intensity Focused Ultrasound

می‌توان با میانگین‌گیری روی ذرات به دست آورد. الگوهای با جزئیات بیش‌تر روش‌های طیف‌گونه<sup>۵</sup> هستند که به خوبی در دینامیک مایعات و امواج غیرخطی مورد استفاده قرار می‌گیرند [۶]. شبیه‌سازی فضاهای بزرگ و فواصل زمانی طولانی توسط الگوهای میکروسکوپی به دلیل داده‌ها و محاسبات بیش‌تر نیاز به فضای حافظه بیشتری دارد که بار محاسباتی سنگینی را به مسأله تحمیل می‌کند. این محاسبات سنگین و پرهزینه، انگیزه مناسبی برای توسعه الگوهای مزوسکوپی مانند روش شبکه - بولتزن به وجود آوردند. الگوهای مزوسکوپی بسیاری از مزایای الگوهای میکروسکوپی را دارا هستند و در عین حال می‌توانند فضاهای بزرگ و فاصله‌های زمانی طولانی را نیز با محاسبات کم‌تری در مقایسه با الگوهای میکروسکوپی شبیه‌سازی کنند.

## ۲. مواد و روش‌ها

الگوی شبکه - بولتزن الگویی مزوسکوپی براساس شبیه‌سازی رفتار مایع با گسسته‌سازی زمان و مکان است [۱۲]. ایده این الگو براساس یک الگوی قدیمی‌تر به نام شبکه گازی اتوماتاً<sup>۶</sup> شکل گرفته است، که مشکلاتی نظیر نوفه (نویز)<sup>۷</sup> آماری دارد [۱۳]. در ال‌بی‌ام<sup>۸</sup> این مشکل با ارائه تابع چگالی توزیع برای ذرات حل شده است. در این روش ذرات به گره‌های شبکه محدود شده‌اند و برای هر گره تعداد معینی ذره همسایه در نظر گرفته شده است که آن گره می‌تواند با آن‌ها تعامل داشته باشد. جهت تعامل میان ذرات توسط بردارهای سرعت واحدی که برای هر همسایه وجود دارد، تعیین می‌شود. تابع توزیع ذرات امکان حضور هر گره را در جهت‌های همسایگی مشخص می‌کند [۱۴]. اندرکنش‌ها و حرکات ذرات طبق رابطه شبکه - بولتزن به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$f_i(\vec{x} + \vec{c}_i, t + 1) - f_i(\vec{x}, t) = \Omega_i(\vec{x}, t) \quad (1)$$

که در آن  $f$  تابع توزیع ذرات؛  $\vec{x}$  موقعیت ذره در

تغییرات در سرعت و چگالی جریان هستند [۶]. برای شبیه‌سازی دینامیک یک مایع، الگوهای بسیاری وجود دارند که هر کدام دارای سطح پیچیدگی متفاوتی هستند. تفاوت میان این الگوها براساس پیچیدگی اندرکنش‌های میان ذرات مایع و میزان جزئیات مورد نیاز است. اولین مطالعات سامانه‌های دینامیکی، آزمایش‌های مبتنی بر مشاهده بوده‌اند، لذا متغیرهای قابل مشاهده، اولین کمیت‌ها برای توصیف یک سامانه دینامیکی هستند. الگوهای میکروسکوپی رایج‌ترین روش برای مطالعه رفتار چنین سامانه‌هایی هستند. مجموعه‌ای از این متغیرها و روابط ریاضی میان آن‌ها یک الگوی میکروسکوپی را به دست می‌دهد. با پیشرفت رایانه‌ها، الگوهای میکروسکوپی نیز پیچیده‌تر شده‌اند. معادلات دیفرانسیل معمولی (آدی‌ای)<sup>۱</sup> و معادلات دیفرانسیل جزئی (پی‌دی‌ای)<sup>۲</sup> ماهیت چنین الگوهای برای شبیه‌سازی دینامیک مایعات هستند [۷]. معادله غیرخطی تمام‌موج، یک الگوی میکروسکوپی است که ریشه در معادلات هیدرودینامیکی دارد. این معادله اثر انکسار، تجزیه و بازتاب را برای امواج فراصدا غیرخطی و ضربه‌های ضعیف مورد استفاده در تراگذارهای (مبدل‌های) متمرکز در نظر می‌گیرد [۸]. معادله وسترولت<sup>۳</sup> و تخمین سهمی‌وار آن، معادله کازدکا<sup>۴</sup>، نمونه‌های دیگری برای الگو کردن رفتار غیرخطی امواج فراصدا هستند [۹]. انتشار غیرخطی امواج فراصدا شکسته شده به وسیله معادله کازدکا در سه بعد تحلیل شده است [۱۰]. با استفاده از الگوهای میکروسکوپی کمیت‌های جزئی بیش‌تری مانند چرخش هر یک از ذرات و اندرکنش میان آن‌ها قابل مطالعه است. در این الگوها، ذرات با مکان و اندازه‌ی حرکتی که دارند، مشخص می‌گردند. روش مونت کارلو مثالی از یک الگوی میکروسکوپی است که حرکت و برخورد ذرات را در یک محیط پیوسته شبیه‌سازی می‌کند [۱۱]. با استفاده از این الگوها کمیت‌های میکروسکوپی را

<sup>5</sup> Pseudo-Spectral

<sup>6</sup> Lattice Gas Automata

<sup>7</sup> Noise

<sup>8</sup> LBM; Lattice-Boltzmann Model

<sup>1</sup> ODE; Ordinary Differential Equations

<sup>2</sup> PDE; Partial Differential Equations

<sup>3</sup> Westervelt

<sup>4</sup> KZK; Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov

پدیده غیرخطی در امواج صفحه‌ای، مقایسه‌ای میان معادله برگر<sup>۳</sup> و ال‌بی‌ام انجام خواهد شد.

### ۳. نتایج

برای سنجش میزان اعتبار ال‌بی‌ام در شبیه‌سازی میدان‌های صوتی غیرخطی، این الگو با سایر روش‌های ارائه شده مقایسه گردید. برای امواج صفحه‌ای و حل معادله برگر ال‌بی‌ام با حل عددی معادله برگر توسط کد تگزاس<sup>۴</sup> مقایسه شد [۱۳]. برای شبیه‌سازی‌های دوبعدی، حل‌کننده‌ای که توسط اندرسون برای انتشار دوبعدی موج غیرخطی نوشته شده است (که روش طیف‌گونه در آن به کار گرفته شده)، انتخاب گردید تا برای خاصیت انکسار امواج صفحه‌ای صوتی با ال‌بی‌ام مقایسه شود.

#### ۳-۱. انتشار موج صفحه‌ای

برای شبیه‌سازی امواج صفحه‌ای از یک منبع صوتی با بسامد ۱۰ مگاهرتز با دو عدد ماخ متفاوت استفاده شد. برای هر دو الگو زمان و مکان با مقادیر  $\Delta x = 1.4628 \times 10^{-7}$  و  $\Delta t = 5.6834 \times 10^{-11}$  گسسته‌سازی می‌شوند. لزجت (ویسکوزیته) جنبشی و عرضی آب برای محیط انتشار در نظر گرفته می‌شود. ضریب واهلش به سمت تعادل با  $\tau = 0.508$  برای ال‌بی‌ام در نظر گرفته می‌شود. به دلیل استفاده از شرایط مرزی متناوب در پایین و بالای صفحه ال‌بی‌ام، برای هر ستون سرعت و چگالی مقادیر یکسانی خواهد داشت. بر این اساس تعداد گره‌ها در جهت  $y$  مقداری دلخواه خواهد بود و در پیاده‌سازی کد تأثیری نخواهد داشت. شکل ۱ نتایج شبیه‌سازی را برای دو الگو و مقایسه میان آن‌ها نشان می‌دهد. تغییرات فشار بهنجار شده (نرمالیزه) در دو فاصله مختلف از منبع را می‌توان مشاهده نمود. عدد غیرخطی بودن گلدبرگ با مقدار  $\Gamma = 143$  در این شکل مورد استفاده قرار گرفته است. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌گردد، پس از طی مسافت مکفی شکل موج به کلی دچار اعوجاج شده است.

صفحه؛  $t$  زمان و  $\vec{c}_i$  تابع سرعت برای هر جهت  $i$  است. طرف چپ معادله بیان‌گر گام افزایشی تابع توزیع (جریان) است و طرف راست  $\Omega$  عبارت برخورد است [۱۵]. با استفاده از تخمین باتناگار-گراس-کروک<sup>۱</sup> [۱۶] این عملگر از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Omega_i = -1/\tau [f_i - f_i^{eq}] \quad (2)$$

عملگر، مبین واهلش به سمت مقدار تعادل است. مقدار  $f^{eq}$  مقدار تعادل تابع توزیع است. گسسته‌سازی مورد استفاده در این شبیه‌سازی دو بعدی با ۹ بردار سرعت است که در این‌جا الگوی D2Q9 نام‌گذاری شده است. برای این الگو  $f^{eq}$  از رابطه ۳ به دست می‌آید.

$$f_i^{eq} = \rho t_i \left[ 1 + \frac{3 \vec{u}_i \cdot \vec{c}_i}{c_s^2} + \frac{9 (\vec{u}_i \cdot \vec{c}_i)^2}{2 c_s^4} - \frac{3 \vec{u}^2}{2 c_s^2} \right] \quad (3)$$

حالا می‌توان متغیرهای ماکروسکوپیک مانند چگالی  $\rho$  و سرعت ذره  $\vec{u}$  را با میانگین‌گیری روی تابع توزیع ذرات از روابط ۴ و ۵ به دست آورد:

$$\rho = \sum_i f_i \quad (4)$$

$$\rho \vec{u} = \sum_i \vec{c}_i f_i \quad (5)$$

محیطی که موج در آن منتشر می‌شود با سرعت صدا در آن  $c_s$  و لزجت (ویسکوزیته)<sup>۲</sup> جنبشی  $\nu$  مشخص می‌گردد. لزجت (ویسکوزیته) جنبشی را می‌توان با استفاده از رابطه ۶ که نشان می‌دهد لزجت تابعی از  $\tau$  است به دست آورد [۱۳].

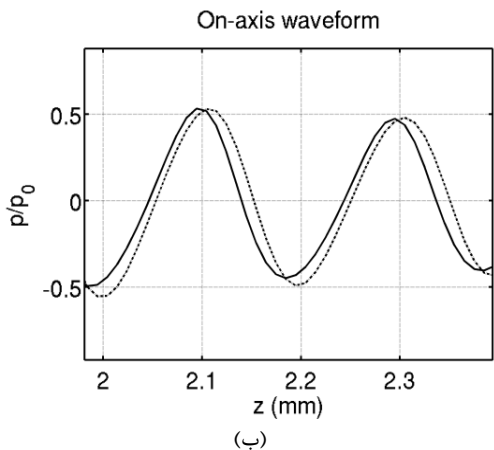
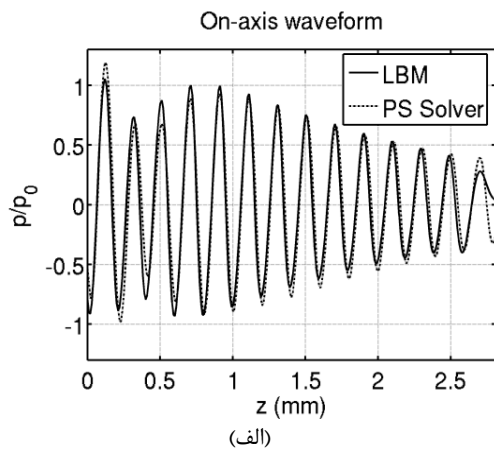
$$\nu = c_s^2 \left( \tau - \frac{1}{3} \right) \quad (6)$$

تا هنگامی که عدد ماخ کوچک باشد، آثار غیرخطی در ال‌بی‌ام در نظر گرفته می‌شوند. براساس پژوهش بویک و همکاران، عددهای ماخ کوچک‌تر از ۰.۱ در شبیه‌سازی میدان‌های صوتی با شبکه- بولتزمن قابل استفاده هستند [۱۵]. با برآورده کردن این شرایط، موج در هنگام انتشار، پس از یک فاصله مشخص دارای اعوجاج خواهد شد [۱۵]. برای در نظر گرفتن

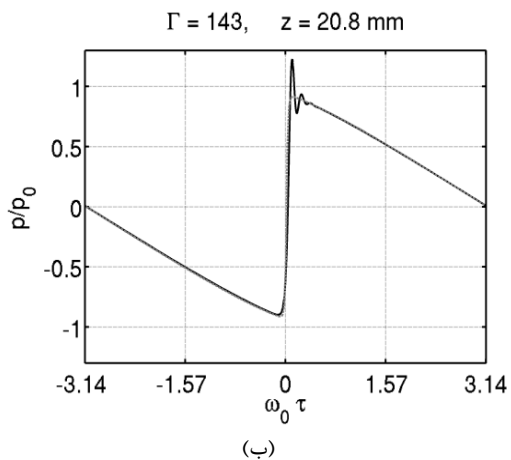
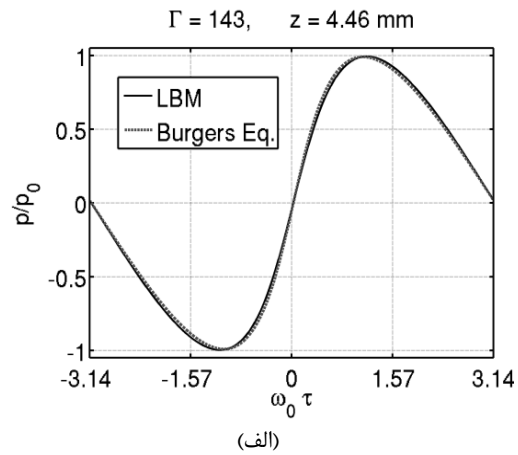
<sup>3</sup> Burger  
<sup>4</sup> Texas Code

<sup>1</sup> Bhatnagar-Gross-Krook  
<sup>2</sup> Viscosity

گره‌های منبع در بخش پایینی صفحه قرار گرفته‌اند. شکافی با اندازه ۷۶ گره برای ایجاد شکست در امواج صفحه‌ای مورد استفاده قرار گرفته است. فاصله میان نقاط منبع و شکاف برابر با یک طول موج تنظیم شده، در شبیه‌سازی برابر با ۱۹ است. موج صفحه‌ای با بسامد ۱۰ مگاهرتز در پایین صفحه ال‌بی‌ام تولید می‌گردد. ویژگی‌های گلیسیرین به عنوان ویژگی‌های محیط سیال انتشار و مقدار عدد ماخ برابر با ۰٫۱ در شبیه‌سازی در نظر گرفته شده‌اند. شکل موج روی محور و مقایسه میان دو روش در شکل ۳ نمایش داده شده است. شکل ۴ فشار بهنجارشده (نرمالیزه) را در  $z = ۱٫۳$  میلی‌متر نشان می‌دهد.



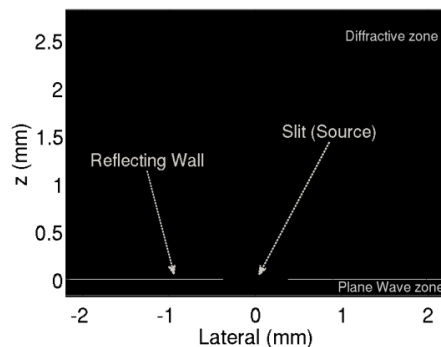
شکل ۳ (الف) مقایسه میان تغییرات فشار محوری بهنجارشده (نرمالیزه) در ال‌بی‌ام و حل‌کننده اندرسون، (ب) تصویر بزرگنمایی شده برای مشاهده جزئیات بهتر.



شکل ۴ مقایسه میان پاسخ‌های ال‌بی‌ام و برگر برای موج صفحه‌ای در فاصله (الف)  $z=۴٫۴۶\text{mm}$  و (ب)  $z=۲۰٫۸\text{mm}$  از منبع با عدد گلدبرگ برابر با ۱۴۳.

### ۳-۲. شبیه‌سازی پراش در دو بعد

برای شبیه‌سازی اثر انکسار میدان صدا صفحه ال‌بی‌ام به دو ناحیه تقسیم می‌شود. شکل ۲ هندسه صفحه که در شبیه‌سازی استفاده شده را نشان می‌دهد.

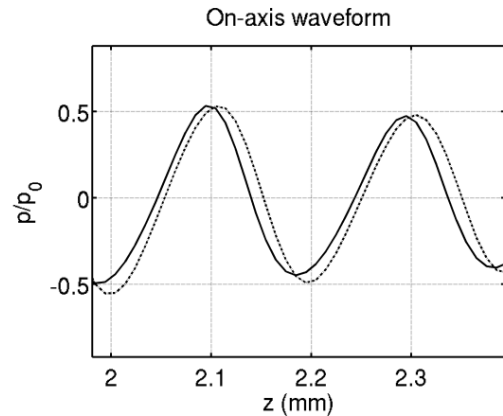


شکل ۲ تقسیم‌بندی صفحه شبیه‌سازی.

معینی از منبع در محیط همگرا شوند، می‌توان یک سامانه مولد موج فراصدايي شدت بالای متمرکز را شبیه‌سازی نمود.

## ۵. مراجع

- [1] Y. Li, J.A. Zagzebski, "Model for harmonic ultrasound imaging," IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, vol. 47, p. 1000-1013, 2000.
- [2] M.A. Averkiou, R.O. Cleveland, "Modeling of an electrohydraulic lithotripter with the KZK," Journal of the Acoustical Society of America, vol. 106, p. 102-112, 1999.
- [3] K. Hynynen et al, "500-element ultrasound phased array system for noninvasive focal surgery of the brain: A preliminary rabbit study with ex vivo human skulls," Journal of Magnetic Resonance Imaging, vol. 52, p. 100-107, 2004.
- [4] N.T. Saghavi et al, "Noninvasive surgery of prostate tissue by high intensity focused ultrasound: an updated report," European Journal Ultrasound, vol. 9, p. 19-29, 1999.
- [5] J. Tavakkoli, D. Cathignol, R. Souchon, O.A. Sapozhnikov, "Modeling of pulsed finite-amplitude focused sound beams in time domain," Journal of the Acoustical Society of America, vol. 104, p. 2061-2072, 1998.
- [6] P.V. Leemput, "Multiscale and equation-free computing for Lattice Boltzmann model," PhD Thesis, University of Leuven, 2007.
- [7] M. Veneroni, "Reaction-diffusion systems for the macroscopic bidomain model of the cardiac electric field, nonlinear analysis," Real World Applications, vol. 10, p. 849-868, 2009.
- [8] S. Ginter et al, "Full-wave modeling of therapeutic ultrasound: Nonlinear ultrasound propagation in ideal fluids," Journal of the Acoustical Society of America, vol. 111, p. 2049-2059, 2002.
- [9] G. Taraldsen, "A generalized Westervelt equation for nonlinear medical ultrasound," Journal of the Acoustical Society of America, vol. 109, p. 1329-1333, 2000.
- [10] M. Hajthasani, Y. Farjami, S. Gharibzadeh, J. Tavakkoli, "A novel numerical solution to the diffraction term in the KZK nonlinear wave equation," in the 38th Annual Symposium of the Ultrasonic Industry Association (UIA), p. 1-9, 2009.
- [11] D.T. Gillespie, "A general method for numerically simulating the stochastic time evolution of coupled chemical reactions," Journal of Computational Physics, vol. 22, p. 403-434, 1976.
- [12] A. Akthakul, C.E. Scott, A.M. Mayes, A.J. Wagner, "Lattice Boltzmann simulation of asymmetric membrane formation by immersion precipitation," Journal of Membrane Science, vol. 249, p. 213-226, 2005.
- [13] E.M. Viggen, "The Lattice Boltzmann method with applications in acoustics," M.Sc. Thesis, Norwegian University of Science and Technology, 2009.
- [14] M.C. Sukop, D.T. Throne Jr., "Lattice Boltzmann model, in Lattice Boltzmann modeling," Berlin Heidelberg, Springer, p. 31-54, 2007.
- [15] J.M. Buick, C.L. Buckley, C.A. Greated, J. Gilbert, "Lattice Boltzmann BGK simulation of nonlinear sound waves: The development of a shock front," Journal of Physics A: Mathematical and General, vol. 33, p. 3917-3928, 2000.



شکل ۴ نیم‌رخ‌های<sup>۱</sup> فشار جانبی بهنجارشده (نرمالیزه) به دست آمده از دو روش.

## ۴. نتیجه‌گیری

نتایج شبیه‌سازی‌ها در این مطالعه با پژوهش‌های پیشین اعتبارسنجی شده‌اند. برای موج صفحه‌ای، ال‌بی‌ام با پاسخ کد تگزاس برای معادله برگر مقایسه شده است. شکل ۱ انطباق مناسبی میان این دو روش را نشان می‌دهد. با این وجود خطاهای محاسباتی نیز وجود دارند که در قسمت ب از شکل ۱ به تصویر کشیده شده‌اند و حاکی از نوساناتی (پدیده گیبس)<sup>۲</sup> در قله (پیک)<sup>۳</sup> موج ضربه است. این خطاها با استفاده از صفحه کوچک‌تر قابل رفع است.

شبیه‌سازی اثر پراش دو بعدی به وسیله ال‌بی‌ام با استفاده از روش طیف‌گونه اعتبارسنجی شده است. تفاوت میان پاسخ‌ها در این حالت به دلیل تفاوت ذاتی میان الگوها و نیز تخمین‌هایی است که در به دست آوردن معادلات از معادله ناویر- استوکس به کار رفته است.

<sup>1</sup> Profiles  
<sup>2</sup> Gibbs Phenomenon  
<sup>3</sup> Peak

- [16] P.L. Bhatnagar, E.P. Gross, M. Krook, "A model for collision processes in gases. 1. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems," *Physical Review*, vol. 94, p. 511, 1954.
- [17] Y.S. Lee, M.F. Hamilton, "Time-domain modeling of pulsed finite-amplitude sound beams," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 97, p. 906-917, 1995.
- [18] M.E. Anderson, "A 2D nonlinear wave propagation solver written in open-source matlab code," *Proceedings of the IEEE Ultrasonics Symposium*, vol. 2, p. 1351 – 1354, 2000.
- [19] S. Ning, "Lattice Boltzmann modeling of heat transfer in nonwoven composite structures," PhD Dissertation, North Carolina State University, 2011.

## Simulating nonlinear acoustic using Lattice-Boltzmann equation in a lossy fluid

M. Abdi<sup>1</sup>, H. Fehri<sup>2</sup>, M. Hajhasani<sup>\*1</sup>, Sh. Gharibzadeh<sup>1</sup>

1. Faculty of Biomedical Engineering, Amirkabir Univ. of Tech.  
2. Faculty of Electrical and Computer Engineering, Tarbiat Modares Univ.

### Abstract

There are numerous applications for acoustics in medical diagnosis and treatment. An important fact to consider is accurate simulation of the acoustic waves and their interaction with body tissues. In medical applications, the nonlinearity of the ultrasound wave propagation plays a significant role in its interactions with body tissues. Currently, there are three approaches to modeling and simulation of nonlinear ultrasound waves in fluid mediums: macroscopic, mesoscopic and microscopic methods. In this study, a Lattice Boltzmann based mesoscopic method (LBM) is investigated. The Boltzmann equation is employed to simulate the flow of a Newtonian fluid in place of the conventional system of Navier- Stokes', continuity and state equations. Through the application of the proposed model distorted nonlinear waves and the shock wave have been calculated for the ultrasound waves in a lossy medium. Moreover, the results are compared to the published results of the macroscopic methods. Resolution of the results signifies the accuracy and effectiveness of the LBM for modeling and simulation of nonlinearity of ultrasound waves for Mach numbers up to 0.01, which stands in the range of ultrasound waves availed for treatment cases (eg HIFU).

**Keywords:** Lattice, Boltzmann method, Nonlinear acoustic waves propagation, Shock wave

pp. 8-13 (In Persian)

---

\* Corresponding author E-mail: hajhasani@aut.ac.ir